

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**
Учреждение образования
« ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ »

ПОДШИВАЛОВ В. П.

КУРС ЛЕКЦИЙ
ПО
ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ
(РАЗДЕЛ «СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ»)

Для студентов 4 – 5 курсов специальности « Геодезия »



Новополоцк
2005

Курс лекций ведется на кафедре прикладной геодезии и фотограмметрии Полоцкого государственного университета. В настоящем издании приводится авторский курс, отработанный за годы его чтения студентам.

Содержание курса лекций соответствует программе изучения дисциплины «Высшая геодезия» для студентов 4 курса очной формы обучения и для студентов 5 курса заочной формы обучения по специальности «Геодезия».

Может быть полезен магистрантам и аспирантам, а также специалистам, занимающимся вопросами формирования координатных систем в геодезии, решением геодезических задач на поверхности эллипсоида и на плоскости геодезических проекций.

Рассмотрен и одобрен учебно-методической комиссией геодезического факультета.

Рецензенты:

кафедра инженерной геодезии
Санкт-Петербургского горного института им. Г. В. Плеханова;

д. т. н. Минько В. Ю. (РУП «Белэрокоsmогеодезия»).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ.....	7
2. ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ	9
3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ.....	10
3. 1. Связь координат на меридианном эллипсе	11
3. 2. Пространственные координаты	12
4. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА	15
4. 1 Классификация кривых на поверхности	15
4. 2. Координатные линии на поверхности эллипсоида	18
4. 3. Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида	19
4. 4 Радиус произвольного нормального сечения эллипсоида. Средний радиус кривизны поверхности эллипсоида	20
4. 5. Длина дуги меридиана	22
4. 6. Длина дуги параллели	25
4. 7 Площадь сфероидической трапеции. Размеры рамок трапеций топографических карт	25
4. 8. Система дифференциальных уравнений геодезической линии	27
4. 9. Уравнение Клеро для геодезической линии	28
5. РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ	30
5. 1. Общие сведения о решении треугольников	30
5. 2. Теорема Лежандра	30
5. 3. Порядок решения треугольников по теореме Лежандра	34
5. 4. Способ аддитантов и порядок решения треугольников	35
6. ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА	37
6. 1. Общие сведения о решении главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида	37
6. 2. О точности вычислений при решении главной геодезической задачи	39
6. 3. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с начальными аргументами	40
6. 4. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды со средними аргументами	42
6. 5 Порядок решения прямой геодезической задачи по формулам со средними аргументами	44
6. 6. Порядок решения обратной геодезической задачи	45
6. 7. Способ Бесселя для решения главной геодезической задачи	46
6. 8. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи ...	49

7.	ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ	52
7. 1.	Применение плоских координат в геодезии	52
7. 2.	Общие сведения из теории конформных отображения поверхностей	54
7. 3.	Связь полярных координат на поверхности эллипсоида и плоскости	55
7. 4.	Характеристические уравнения геодезических проекций	57
7. 5.	Общее алгоритмическое описание геодезических проекций	59
7. 6.	Характеристические уравнения некоторых геодезических проекций	60
7. 6. 1.	Поперечно-цилиндрические проекции	60
7. 6. 2.	Конические проекции	62
7. 6. 3.	Азимутальные проекции	64
7. 7.	Выбор значения масштаба в геодезических проекциях	65
7. 8.	Проекция Гаусса – Крюгера в традиционном изложении	66
7. 8. 1.	Формулы для вычисления координат в проекции Гаусса – Крюгера	66
7. 8. 2.	Сближение меридианов в проекции Гаусса – Крюгера	68
7. 8. 3.	Частный масштаб длин в проекции Гаусса – Крюгера	68
7. 8. 4.	Кривизна изображения геодезической линии и поправки за нее	69
7. 8. 5.	Практика применения проекции Гаусса – Крюгера	72
7. 9.	Современные требования к геодезическим проекциям	74
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	77
	ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ	78

ВВЕДЕНИЕ

Основными задачами высшей геодезии являются:

- создание системы опорных точек на земной поверхности и в околоземном пространстве, взаимное положение которых определено в принятой системе координат с точностью, необходимой и достаточной для решения научных и практических задач;
- изучение формы, размеров и внешнего гравитационного поля Земли.

Решение этих задач производится теоретически обоснованными методами математической обработки результатов астрономических, геодезических, гравиметрических и спутниковых измерений.

Методы построения государственных геодезических построений на основе измерений и математической обработки их результатов рассматриваются в первой части курса высшей геодезии (основные геодезические работы, математическая обработка измерений в государственных геодезических построениях), а также в таких специальных дисциплинах, как геодезическая астрономия, гравиметрия, оптика – электронные методы измерений, космические технологии в геодезии. Государственные геодезические построения рассчитаны как для получения надежной информации для изучения формы и размеров Земли, так и для создания координатной основы топографических съемок и инженерно-геодезического обеспечения различных отраслей хозяйственной деятельности.

С развитием геодезических методов определения координат искусственных спутников Земли (ИСЗ) появились возможности высокоточного пространственно-временного описания уравнений их орбит. Это послужило базой развития принципиально новых методов определения геодезических координат методом пространственной засечки, основанных на спутниковых системах позиционирования, когда носителями координат в режиме реального времени являются ИСЗ. Спутниковые методы реализованы в приемниках, работающих в системах NAVSTAR–GPS (США) и ГЛОНАСС (РФ), позволяют решать комплекс задач высшей геодезии с точностью, на порядок выше, в существенно более сжатые сроки по сравнению с классическими наземными методами.

В связи с этим коренным образом меняются требования к математическим методам решения задач высшей геодезии и их точности. Алгоритмы вычислений при решении этих задач должны быть удобны для реализации на ЭВМ.

Для того, чтобы иметь представление о точностных характеристиках построения государственной геодезической основы методами триангуляции, полигонометрии и трилатерации 1 – 2 классов, напомним величины средних квадратических ошибок:

относительные ошибки линейных величин измерений	1 : 500 000 – 1 : 300 000
горизонтальных углов	0.7 - 1.0 ^{''}
определений астрономических широт и долгот на пунктах Лапласа	0.3 – 0.5 ^{''}
определений астрономических азимутов	0.5 – 0.7 ^{''}
определений абсолютных значений ускорения силы тяжести	0.1 – 0.5 мгл
определений относительных значений ускорения силы тяжести	0.05 – 0.5 мгл.

Система геодезических координат 1942 года (СК – 42), введенная на территории Советского Союза с 1946 года Постановлением Правительства, была закреплена на земной поверхности центрами порядка 6 000 пунктов триангуляции 1 класса, объединенных в 87 полигонов и отнесенных к поверхности референц-эллипсоида Красовского. Параметры референц-эллипсоида Красовского установлены из градусных измерений, выполненных в мире к 40 – м годам XX столетия, и

составляют: большая полуось $a = 6\,378\,245$ м, полярное сжатие $\alpha = 1 : 298,3$. Его ориентировка в теле Земли определена исходными геодезическими датами, выведенными из градусных измерений, выполненных только на территории Советского Союза, для центра главного астронома – геодезического пункта в Пулковской обсерватории.

К концу XX столетия выполнено уравнивание астрономо-геодезической сети (АГС) 1 – 2 классов на территории бывшего Советского Союза, включающей в себя 277 полигонов первого класса и порядка 164 000 пунктов 1 – 2 классов. Центры этих пунктов закрепляют на земной поверхности референцную систему геодезических координат 1995 года (СК – 95), введенную Постановлением Правительства на территории Российской Федерации с 1 июля 2002 года. Фрагмент АГС 1 – 2 классов на территории Республики Беларусь представлен более чем 2 500 пунктами, координаты центров которых получены в СК – 95. Координатной поверхностью в СК – 95 является эллипсоид Красовского с исходными геодезическими датами в Пулково.

Для геодезического обеспечения навигации и решения глобальных задач в настоящее время используют общеземные системы координат WGS – 84 (США) и ПЗ – 90 (РФ), полученные независимо друг от друга по результатам наблюдений геодезических, геодинамических и навигационных ИСЗ, а также по наземным гравиметрическим данным. Параметры этих систем координат совпадают в пределах точности их определения.

Для системы ПЗ – 90 в качестве координатной принята поверхность земного эллипсоида с параметрами: большая полуось $a = 6\,378\,136$ м, полярное сжатие $\alpha = 1 : 298,257\,839$. В системе WGS – 84 – соответственно: $a = 6\,378\,137$ м, $\alpha = 1 : 298,257\,224$.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ СФЕРОИДИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Основной задачей геодезии является определение взаимного положения точек земной поверхности и околоземного пространства в соответствующей системе координат. В качестве координатной поверхности в геодезии принимается поверхность **земного эллипсоида** (геометрическая модель Земли). Под земным эллипсоидом понимают поверхность эллипсоида вращения, форма и размеры которого определяются из совместной математической обработки астрономических, гравиметрических и геодезических измерений, выполненных на физической поверхности Земли. Под физической моделью Земли понимают **геоид**, тело которого ограничено гладкой, всюду выпуклой поверхностью, в каждой точке которой вектор силы тяжести является нормалью, а поле силы тяжести имеет характеристики, идентичные характеристикам поля силы тяжести реальной Земли (**реальное гравитационное поле**). Характеристики этого поля получают из гравиметрических измерений.

В зависимости от ориентировки в теле Земли, различают **общий земной эллипсоид**, ось вращения и плоскость экватора которого совпадают с осью вращения и плоскостью экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Поверхность общего земного эллипсоида наилучшим образом подходит ко всей поверхности геоида. Если поверхность эллипсоида ориентируется в теле Земли так, чтобы наилучшим образом подходить к некоторой части поверхности геоида, например, на территории отдельного государства или группы государств, такой эллипсоид называют **референц – эллипсоидом**. Ориентировка поверхности референц – эллипсоида производится установлением исходных геодезических дат для центра геодезического пункта, который является исходным для всей государственной геодезической сети. Ось вращения и плоскость экватора референц – эллипсоида параллельны оси вращения и плоскости экватора реальной Земли на некоторую эпоху. Земной эллипсоид с принятыми физическими характеристиками называют **Нормальной Землей**, формирующей **нормальное гравитационное поле**, характеристики которого получают из вычислений. Разности ускорений силы тяжести в реальном и нормальном полях определяют **аномальное гравитационное поле**. Геометрическими характеристиками этого поля служат величины, характеризующие непараллельность поверхностей геоида и земного эллипсоида – **уклонения отвеса** и **высоты поверхности геоида над эллипсоидом – аномалии высот**.

При решении задач сфероидической геодезии принимают основные параметры земного эллипсоида большую полуось – a и полярное сжатие – α точными величинами и поэтому все вычисления, связанные с решением тех или иных задач на поверхности эллипсоида выполняют с необходимой точностью. Методы определения параметров земного эллипсоида, установления систем координат на его поверхности, а также изучение аномального гравитационного поля с целью редуцирования измерений с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида рассматриваются в теоретической (физической) геодезии.

При решении задач сфероидической геодезии считают параметры земного эллипсоида как координатной поверхности установленными, а измерения редуцированными с точностью, необходимой и достаточной. Положение точек определяется **пространственными геодезическими координатами**: широтой B , долготой L , высотой H . **Геодезической широтой** точки называется угол, образованный нормалью к поверхности эллипсоида с плоскостью его экватора, **геодезической долготой** – двугранный угол, образованный меридианом данной точки с меридианом,

принятым за начальный, **геодезической высотой** – отрезок нормали к поверхности эллипсоида. **Геодезическим меридианом** называется геометрическое место точек равных долгот, он получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью, содержащей в себе ось его вращения, **геодезической параллелью** называется геометрическое место точек равных широт, получается как линия пересечения поверхности эллипсоида плоскостью, проведенной перпендикулярно оси его вращения. Все меридианы земного эллипсоида – эллипсы, а параллели – окружности. Параллель наибольшего радиуса называется **геодезическим экватором**. При решении геодезических задач с применением спутниковых систем позиционирования, когда носители координат – ИСЗ могут находиться на значительных высотах над эллипсоидом, широкое применение нашли **системы пространственных прямоугольных координат (X, Y, Z)**, центр которых совпадает с геометрическим центром земного эллипсоида, оси абсцисс и ординат лежат в плоскости экватора, образуя правую систему координат, ось аппликат совпадает с осью вращения эллипсоида.

В сфероидической геодезии используется также система полярных координат – азимуты геодезических линий и их длины (геодезические азимуты и расстояния на поверхности эллипсоида), которые получаются путем редуцирования на поверхность эллипсоида результатов угловых и линейных измерений. **Геодезическим азимутом** направления в данной точке называется угол, образованный геодезической линией и геодезическим меридианом данной точки. Сфероидическая геодезия решает задачи определения взаимного положения точек на поверхности земного эллипсоида, используя его геометрию, связь между системами координат.

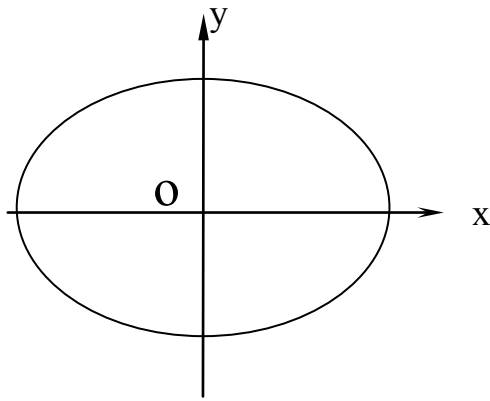
Для массовых геодезических работ, особенно в практических приложениях геодезических данных, системы координат на поверхности эллипсоида неудобны, решение задач трудоемко, поэтому в сфероидической геодезии также решаются задачи отображения поверхности земного эллипсоида на плоскости по математическим законам в **геодезической проекции** с целью установления системы плоских прямоугольных и полярных координат.

При решении задач сфероидической геодезии принципиально важными являются вопросы необходимой точности вычислений. Здесь недопустимо наложение ошибок вычислений на ошибки измерений. Ошибки вычислений состоят как из точности рабочих формул, так и ошибок округлений и должны быть на порядок менее значимыми по сравнению с ошибками измерений. Это объясняется тем, что математическая обработка результатов геодезических измерений с целью получения их вероятнейших значений производится по методу наименьших квадратов. Вероятно-статистическое обоснование метода наименьших квадратов указывает на то, что ошибки измерений должны носить случайный характер и подчиняться нормальному закону распределения. Методика геодезических измерений и приборы для их выполнения разрабатываются так, чтобы совокупное влияние на формирование ошибки измеренного элемента отвечало требованиям центральной предельной теоремы Ляпунова о случайных величинах, подчиняющихся нормальному закону распределения. При этом, чем выше класс и точность приборов для геодезических измерений, тем строже эти требования выполняются.

4. ПАРАМЕТРЫ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

Поверхность земного эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси и имеет те же параметры, что и образующий ее эллипс. Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фиксированных точек, называемых его фокусами, постоянна и равна большой оси эллипса.

Уравнение эллипса в системе плоских прямоугольных координат имеет вид



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

где a – большая и b – малая полуоси, являются линейными параметрами эллипса и определяют его форму и размеры.

Для решения задач сфероидической геодезии применяют также относительные параметры эллипсоида вращения, которые связаны с большой и малой полуосями и характеризуют его форму:

Рис. 2. 1

полярное сжатие $\alpha = \frac{a-b}{a}; \quad (2.2)$

эксцентриситет $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad (2.3)$

второй эксцентриситет $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.4)$

Для однозначного определения поверхности эллипсоида вращения необходимо знать два параметра, один из которых обязательно должен быть линейным. Используя выражения (2.3) – (2.4), несложно получить формулы связи различных параметров:

$$b = a(1 - \alpha) = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2}};$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2\alpha - \alpha^2; \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2};$$

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}; \quad \frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{e}{e'}.$$

Для эллипсоида Красовского, как известно, большая полуось $a = 6\,378\,245$ м и полярное сжатие $\alpha = 1 : 298.3$, по которым можно вычислить следующие значения параметров:

$$b = 6\,356\,863.0188 \text{ м};$$

$$e = 0.003\,352\,3299;$$

$$e^2 = 0.006\,693\,4216;$$

$$e'^2 = 0.006\,738\,5254.$$

Для приближенных расчетов полезно запомнить округленные значения параметров земного эллипсоида: $a \approx 6400$ км, $a - b \approx 21$ км, $\alpha \approx 1 : 300$ (3×10^{-3}), $e^2 \approx e'^2 \approx 2\alpha \approx 1 : 150$ (7×10^{-3}).

3. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ВЫСШЕЙ ГЕОДЕЗИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ НИМИ

Уравнение поверхности эллипсоида вращения в системе пространственных прямоугольных координат имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

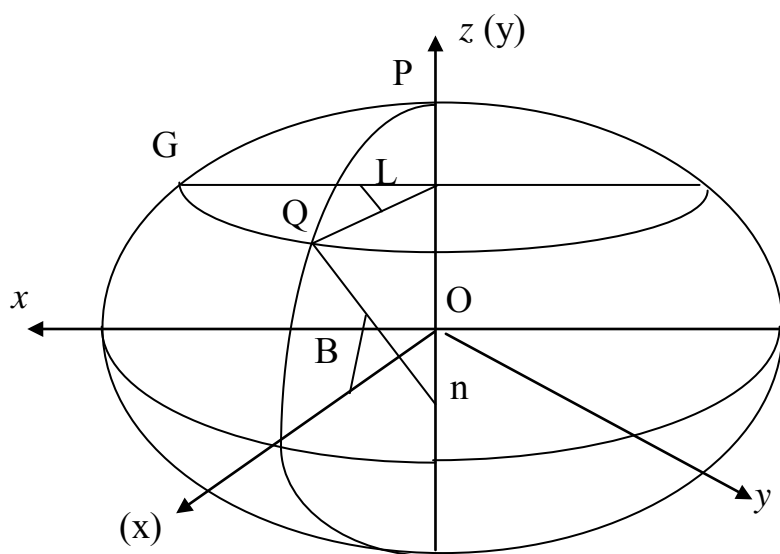


Рис. 3. 1

Система пространственных прямоугольных координат установлена следующим образом. Ее начало совпадает с центром эллипсоида O , ось Oz совпадает с осью его вращения OP , ось Ox лежит на пересечении плоскостей экватора и гринвичского меридиана PG , ось Oy дополняет систему координат до правой.

На рис. 3. 1, кроме того, имеем: B, L – геодезические широта и долгота;

Qn – нормаль к поверхности эллипсоида в точке Q .

Если в (3. 1) положить $x = 0$ или $y = 0$, получим уравнения меридианных эллипсов

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Если в уравнении (3. 1) положить $z = 0$, получим уравнение геодезического экватора, который представляет собой окружность радиуса a

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$$

Если поверхность эллипсоида пересечь плоскостью $z = \text{const}$, получим окружности радиуса r , которые называются геодезическими параллелями. Отсюда следует, что экватор – параллель наибольшего радиуса ($r = a$).

На рисунке 3. 2 имеем системы координат, определяющие положение точки Q на меридианном эллипсе: плоские прямоугольные x, y ; геодезическую широту B ; геоцентрическую широту Φ – угол, образованный геоцентрическим радиус-вектором OQ с плоскостью экватора; приведенную широту u – угол, образованный отрезком прямой Q_1Q_2O с плоскостью экватора, где Q_1 и Q_2 – проекции точки Q на окружности радиусов a и b , описанные вокруг точки O как центра.

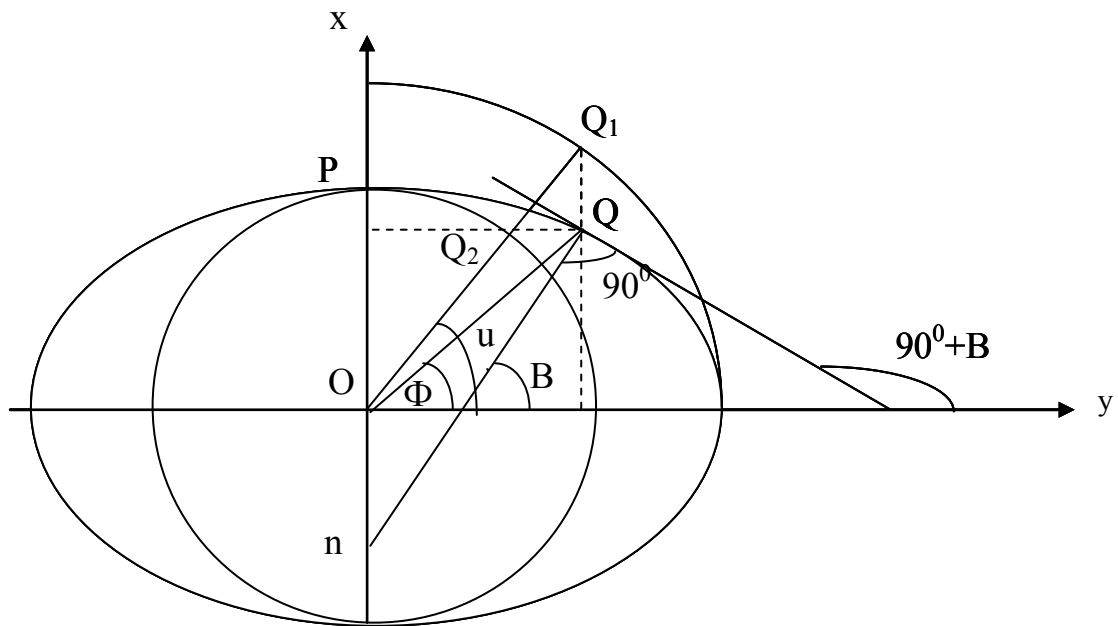


Рис. 3. 2

3. 1. Связь координат на меридианном эллипсе

Для установления связи между системами координат на меридианном эллипсе обратимся к рисунку 3. 2. Прежде определим связь широт с плоскими прямоугольными координатами.

Для геоцентрической широты имеем уравнение связи из рисунка

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x} \quad (3.2)$$

Для приведенной широты имеем

$$a \cos u = x; \quad b \sin u = y \quad , \quad (3.3)$$

откуда получаем выражение

$$\operatorname{tgu} = \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{y}{x} \quad (3.4)$$

Сравнивая выражения (3.2) и (3.4), получаем уравнение связи геоцентрической и приведенной широт

$$\operatorname{tgu} = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} \Phi \quad . \quad (3.5)$$

Для установления связи координат x, y с геодезической широтой B вспомним геометрический смысл первой производной. Если задано уравнение плоской кривой $y = f(x)$, то первая производная dy / dx равна тангенсу угла, образованно-

го касательной к кривой в данной точке с положительным направлением оси абсцисс. Применительно к рисунку 3. 2 можем записать

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 + B) = -\operatorname{ctg}B \quad (3.6)$$

Уравнение меридианного эллипса в функции плоских прямоугольных координат имеет выражение (2. 1). Дифференцируем по переменной x это уравнение

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда имеем для производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x} \quad (3.7)$$

Приравнивая правые части уравнений (3. 6) и (3. 7), получаем

$$\operatorname{tg}B = \frac{a^2}{b^2} \frac{y}{x} = \frac{1}{1-e^2} \frac{y}{x} \quad (3.8)$$

Учитывая выражения (3. 4) и (3. 5), можем записать следующие уравнения связи широт

$$\operatorname{tg}\Phi = (1-e^2)\operatorname{tg}B; \quad \operatorname{tgu} = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}B; \quad \operatorname{tg}\Phi = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tgu} \quad (3.9)$$

Используя полученные уравнения, а также имея в виду уравнения (3. 4), получаем выражения для плоских прямоугольных координат x, y в функции широт:

$$x = a \cos u; \quad y = b \sin u \quad (3.10)$$

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}; \quad y = \frac{a(1-e^2) \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} \quad (3.11)$$

$$x = \frac{a\sqrt{1-e^2} \cos \Phi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \Phi}}; \quad y = \frac{a\sqrt{1-e^2} \sin \Phi}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \Phi}} \quad (3.12)$$

3. 2. Пространственные координаты

Для определения положения точки Q на поверхности эллипсоида в сферической геодезии используют системы пространственных координат: геодезические (B), приведенные (u) и геоцентрические (Φ) широты и геодезические долготы L , а также декартовы координаты x, y, z . На рисунке 3. 1 меридианный эллипс определяемой точки PQ . Из сравнения рисунков 3. 1 и 3. 2 замечаем следу-

ющие уравнения связи прямоугольных пространственных x, y, z и в плоскости меридианного эллипса $(x), (y)$ координат

$$x = (x) \cos L; \quad y = (x) \sin L; \quad z = (y). \quad (3.13)$$

Подставляя сюда выражения для (x) и (y) из (3.10) – (3.12), несложно получить уравнения связи, например:

$$x = a \cos u \cos L; \quad y = a \cos u \sin L; \quad z = a \sqrt{1 - e^2} \sin u \quad (3.14)$$

$$x = \frac{a \cos B \cos L}{W}; \quad y = \frac{a \cos B \sin L}{W}; \quad z = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} \quad (3.15)$$

Здесь и в последующем мы используем общепринятое в геодезии обозначение $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}$, которое называют первой основной функцией широты.

В настоящее время для решения геодезических задач все более используются спутниковые системы позиционирования, когда носителями координат являются созвездия специальных ИСЗ, находящихся на значительном удалении от поверхности земного эллипсоида. Если это удаление характеризуется геодезической высотой H , то уравнения связи пространственных прямоугольных и геодезических широт, долгот и высот принимают вид, следуемый из (3.15), если к каждой из координат x, y, z прибавить проекции геодезической высоты H на соответствующие координатные оси

$$x = (N + H) \cos B \cos L; \quad y = (N + H) \cos B \sin L; \quad z = [N(1 - e^2) + H] \sin B \quad (3.16)$$

Здесь принято обозначение: $N = \frac{a}{W}$ - отрезок Qn на рисунке 3.1.

На практике часто возникает задача вычисления координат B, L, H по известным x, y, z . Рассмотрим вывод формул для решения этой задачи. Разделив второе уравнение (3.16) на первое, получаем

$$\operatorname{tg} L = \frac{y}{x} \quad (3.17)$$

Возведя в квадрат первые два уравнения (3.16) и найдя их сумму, получаем уравнение

$$x^2 + y^2 = (N + H)^2 \cos^2 B, \quad (3.18)$$

которое совместно с третьим из системы (3.16) приводит к уравнению

$$\operatorname{tg} B = \frac{z + e^2 N \sin B}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (3.19)$$

которое позволяет вычислить геодезическую широту методом последовательных приближений, которые будут сходящимися. Так, если требуется вычислить широту

с точностью до $0.0001''$, достаточно трех приближений. Для удобства вычислений формулу (3.19) можно преобразовать, переходя в правой части уравнения от $\sin B$ к $\operatorname{tg} B$ по формуле

$$\sin B = \frac{\operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B}}.$$

В результате, получим после несложных преобразований

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(z + \frac{ae^2 \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} \right). \quad (3.20)$$

В этом уравнении нет необходимости последовательно вычислять различные тригонометрические функции от искомой широты B , как это нужно делать в уравнении (3.19), что упрощает вычисления.

Определив долготу и широту по приведенным формулам, геодезическую высоту можно определить с контролем из уравнений (3.16) или (3.18)

$$H = \frac{x}{\cos B \cos L} - N; \quad H = \frac{y}{\cos B \sin L} - N$$

$$H = \frac{z}{\sin B} - N(1 - e^2); \quad H = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos B} - N$$

4. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

4. 1. Классификация кривых на поверхности

На любой поверхности между двумя точками можно провести бесконечное множество самых различных линий, обладающих теми или иными свойствами. Для решения геодезических задач на поверхности эллипсоида нас будут интересовать из этого множества только те линии, которые связаны с измерениями, редуцированными на поверхность эллипсоида с физической поверхностью Земли, а также координатные линии.

С учетом этого рассмотрим следующие линии на поверхности земного эллипсоида.

Плоские сечения – линии, образованные как след пересечения поверхности некоторой плоскостью. В зависимости от того, как ориентирована плоскость сечения относительно поверхности, различают: **нормальные сечения** в данной точке, если плоскость сечения содержит в себе нормаль к поверхности в данной точке, **центральные сечения**, когда плоскость содержит в себе центр эллипсоида, в этом случае всегда сечение будет нормальным в экваториальных точках. Если нормальное сечение проходит в азимуте, равном 90^0 , его называют **первым вертикалом** эллипсоида в данной точке, радиус которого равен N , выражение которого приведено в формуле (3. 16).

Геодезическая линия – кратчайшая кривая между двумя точками на поверхности. Следует заметить, что геодезические линии на любой поверхности играют особую роль (прямые на плоскости, дуги больших кругов на сфере и др.). Геометрия геодезических линий характеризует геометрию поверхности и все метрические задачи на поверхностях решают с помощью уравнений, связывающих элементы геодезических линий. Примером этому являются формулы плоской и сферической тригонометрии, связывающие линейные и угловые элементы геометрических фигур, образованных прямыми линиями на плоскости и дугами большого круга на сфере. Следует отметить, что на произвольных поверхностях, вообще говоря, не существует подобных формул в замкнутом виде в элементарных функциях, здесь используют дифференциальные формулы геодезических линий, интегрирование которых позволяет решать различные задачи. В этих случаях используют методы дифференциальной геометрии поверхностей.

При решении геодезических задач на поверхности земного эллипсоида мы будем использовать методы дифференциальной геометрии.

Для того, чтобы лучше понять данные методы, применяемые в сфероидической геодезии, вспомним основные элементы кривых на поверхностях. Прежде всего вспомним, что в дифференциальной геометрии выделяют **регулярные или гладкие кривые и поверхности**, не имеющие особых (разрывных) точек и линий. На таких линиях и поверхностях для текущей точки производная непрерывна и плавно меняет свое значение с изменением координат. Такие кривые и поверхности называют также дифференцируемыми. Поверхность эллипсоида регулярная и мы будем рассматривать геометрию регулярных кривых на этой поверхности.

Вспомним основные определения, относящиеся к кривым на поверхностях. В каждой точке кривой можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости и прямые (рис. 4. 1), образующие **сопровождающий трехгранник кривой**:

- **касательную плоскость K** к поверхности и **вектор касательной \vec{k}** к кривой L в точке M , имеющие одну общую точку с поверхностью и кривой;

- **нормальную плоскость N** , которая перпендикулярна касательной плоскости – все прямые, лежащие в нормальной плоскости и проходящие через точку M , называются **векторами нормалей к кривой** в данной точке, один из которых перпендикулярен касательной плоскости и называется нормалью \bar{n} к поверхности в данной точке;
- **соприкасающуюся плоскость кривой S** , проходящую через три бесконечно близкие точки кривой, вектор нормали, лежащий на пересечении нормальной и соприкасающейся плоскостей называется **главной нормалью кривой \bar{t}** ;
- **бинормаль \bar{b}** - нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости;

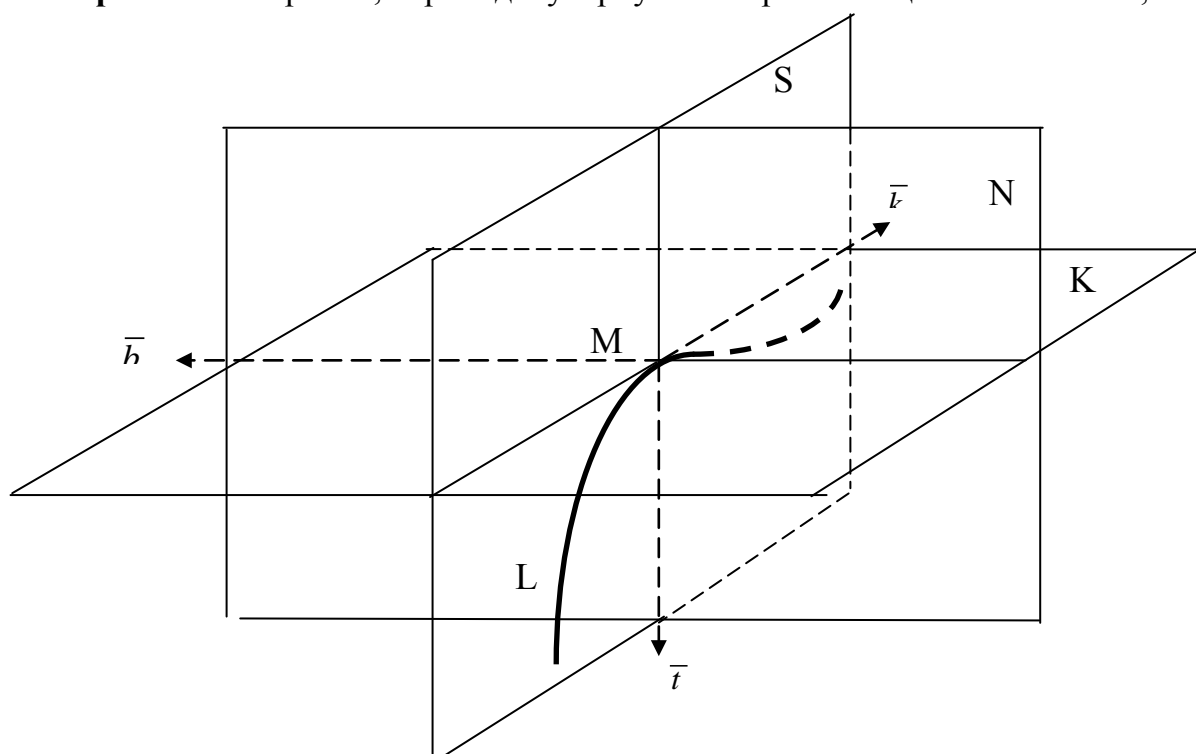


Рис. 4. 1

Таким образом можно отметить, что любая плоская кривая (следовательно, и плоское сечение на поверхности) имеет одну соприкасающуюся плоскость. У геодезической линии в каждой ее точке главная нормаль кривой \bar{t} совпадает с нормалью к поверхности \bar{n} в данной точке. Для произвольных кривых на поверхностях точки, в которых эти два вектора совпадают, называются **геодезическими точками**. Если на поверхности эллипсоида вращения проведено нормальное в данной точке сечение, то она также геодезическая, как геодезической будет точка, находящаяся на продолжении нормального сечения до точки, лежащей на одной параллели с данной. У центральных сечений эллипсоида экваториальные точки – геодезические. Таким образом можно отметить, что любое нормальное сечение земного эллипсоида имеет, по крайней мере, две геодезические точки, удаление которых будет тем больше, чем ближе плоскость сечения проходит от его центра.

Если на поверхности эллипсоида (рис. 4. 2) имеем две точки A и B , то между ними можно провести как геодезическую линию (одну единственную), так и нормальное как в одной, так и другой точках сечения. Если эти точки не лежат на одной параллели ($B_A \neq B_B$), что чаще всего может иметь место на практике, то получаем два взаимно нормальных сечения AaB и BbA , плоскости которых пройдут: для прямого нормального сечения в точке A - через точку B и нормаль An_A , для

прямого нормального сечения в точке В – через точку А и нормаль Bn_B . Эти сечения не совпадут друг с другом потому, что нормали к поверхности эллипсоида An_A и Bn_B в данных точках не лежат в одной плоскости, а образуют скрещивающиеся прямые. Это хорошо видно из рисунка 4. 2.

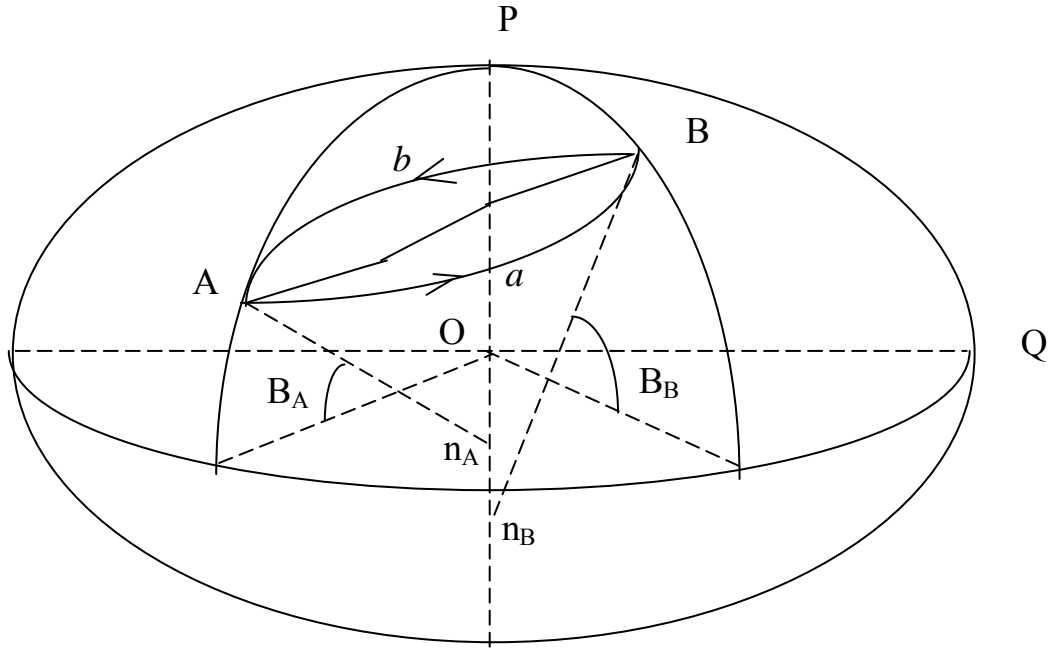


Рис. 4. 2

Уравнение любой поверхности можно записать в векторной форме

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad , \quad (4.1)$$

подставляя сюда выражения для координат (3. 14) или (3. 15) для эллипсоида получим уравнения его поверхности в функции параметрических координат:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}(u, L) = a \cos u \cos L \bar{i} + a \cos u \sin L \bar{j} + b \sin u \bar{k} \\ \bar{r} &= \bar{r}(B, L) = \frac{a}{W} \cos B \cos L \bar{i} + \frac{a}{W} \cos B \sin L \bar{j} + \frac{a(1-e^2)}{W} \sin B \bar{k} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для любой кривой на поверхности можем записать уравнение в дифференциальной форме, которое выражает **линейный элемент поверхности**.

$$ds = |d\bar{r}|,$$

или в параметрических координатах

$$ds^2 = Edu^2 + 2FdudL + GdL^2 \quad . \quad (4.3)$$

Уравнение (4. 3) носит название первой основной квадратичной формы Гаусса для любой поверхности, коэффициенты которой E, F, G имеют выражения в частных производных:

$$\begin{aligned}
E &= (\bar{r}_u)^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\
F &= (\bar{r}_u, \bar{r}_L) = x_u x_L + y_u y_L + z_u z_L \\
G &= (\bar{r}_L)^2 = x_L^2 + y_L^2 + z_L^2
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для ортогональной координатной сетки на поверхности эллипсоида (меридианов и параллелей) всегда имеет место $F = 0$, в чем несложно убедиться, если иметь в виду уравнения (3.14) или (3.15), из которых, кроме того, получаем выражения

$$E = a^2(1 - e^2 \cos^2 u) = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{W^6}; \quad G = a^2 \cos^2 u = \frac{a^2 \cos^2 B}{W^2} \tag{4.5}$$

С учетом этого линейный элемент поверхности эллипсоида имеет выражение.

$$dS = \sqrt{M^2 dB^2 + r^2 dL^2} \tag{4.6}$$

здесь приняты обозначения коэффициентов первой квадратичной формы для эллипсоида $E = M^2$, $G = r^2$ и их выражения следуют из уравнений (4.5). Геометрический смысл этих коэффициентов поясним несколько дальше.

4. 2. Координатные линии на поверхности эллипсоида

Как уже отмечалось ранее, координатными линиями на поверхности земного эллипсоида являются меридианы и параллели, уравнения которых могут быть получены из уравнения (4.6), учитывая (4.5). Полагая $L = const$, $dL = 0$, получим уравнение меридиана в функции геодезической и приведенной широты

$$ds_{мер.} = dX = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} dB = \frac{a}{V} du \tag{4.7}$$

И для параллели получим аналогично при условии $B = const$, $dB = 0$

$$ds_{пар.} = dY = \frac{a \cos B}{W} dL = a \cos u dL \tag{4.8}$$

В выражении (4.7) и в последующем мы используем принятое в геодезии обозначение функции V . Эта величина носит название второй основной функции широты и имеет следующие выражения.

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}} = \frac{W}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{4.9}$$

Сравнивая выражения (4.6), (4.7) и (4.8), замечаем, что величина M выражает радиус кривизны меридиана, а r – параллели.

Учитывая изложенное, заметим, что меридианы и параллели земного эллипсоида представляют собой плоские сечения. При этом меридианы – нормальные сечения, состоящие сплошь из геодезических точек, следовательно, они являются также геодезическими линиями. Заметим, что геодезические линии эллипсоида

да, проходящие в произвольном азимуте, не являются плоскими кривыми. Меридиан является исключением. Параллели земного эллипсоида являются наклонными по отношению к нормали плоскими сечениями. Более того, выражая радиус параллели r через радиус первого вертикала N (3. 16), замечаем угол наклона плоскости параллели к нормали, которая лежит в плоскости первого вертикала, равный геодезической широте B .

$$r = N \cos B \quad (4. 10)$$

При этом уравнение вида (4. 10) устанавливает связь между радиусами кривизны наклонных и нормальных плоских сечений и выражает **теорему Менье**.

Можно отметить, что параллель наибольшего радиуса (экватор) является нормальным сечением и геодезической линией.

В теории поверхностей координатные сетки в виде меридианов и параллелей, когда одна координатная линия является геодезической, а другая негеодезическая, называют полугеодезическими.

4. 3. Главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида.

Из теории поверхностей известно, что в каждой точке поверхность имеет различную кривизну, зависящую как от координат данной точки, так и направления. Другими словами, если в данной точке поверхности провести нормальные сечения, то радиус их кривизны будет зависеть от направления (азимута). При этом на любой поверхности всегда можно выбрать такие два направления, вдоль которых будет иметь место наибольший и наименьший радиусы ее кривизны. Такие направления на поверхности называют главными, а радиусы кривизны нормальных сечений, проходящих вдоль этих направлений называют **главными радиусами кривизны поверхности**.

Если взять меридиан PQ (рис. 4. 3), то он делит поверхность эллипсоида на две симметричные по геометрическим параметрам части. Направление вдоль меридиана является одним из главных направлений на поверхности эллипсоида, вдоль которого кривизна поверхности равна величине, обратной радиусу меридиана

$$k_{мер} = \frac{1}{M} = \frac{W^3}{a(1-e^2)} \quad (4. 11)$$

Вторым главным направлением на поверхности эллипсоида является направление вдоль первого вертикала – дуга Tk (рис. 4. 3) и кривизна поверхности эллипсоида вдоль этого направления имеет выражение

$$k_{1верт} = \frac{1}{N} = \frac{W}{a} \quad (4. 12)$$

Величины M и N носят название главных радиусов кривизны поверхности эллипсоида в данной точке.

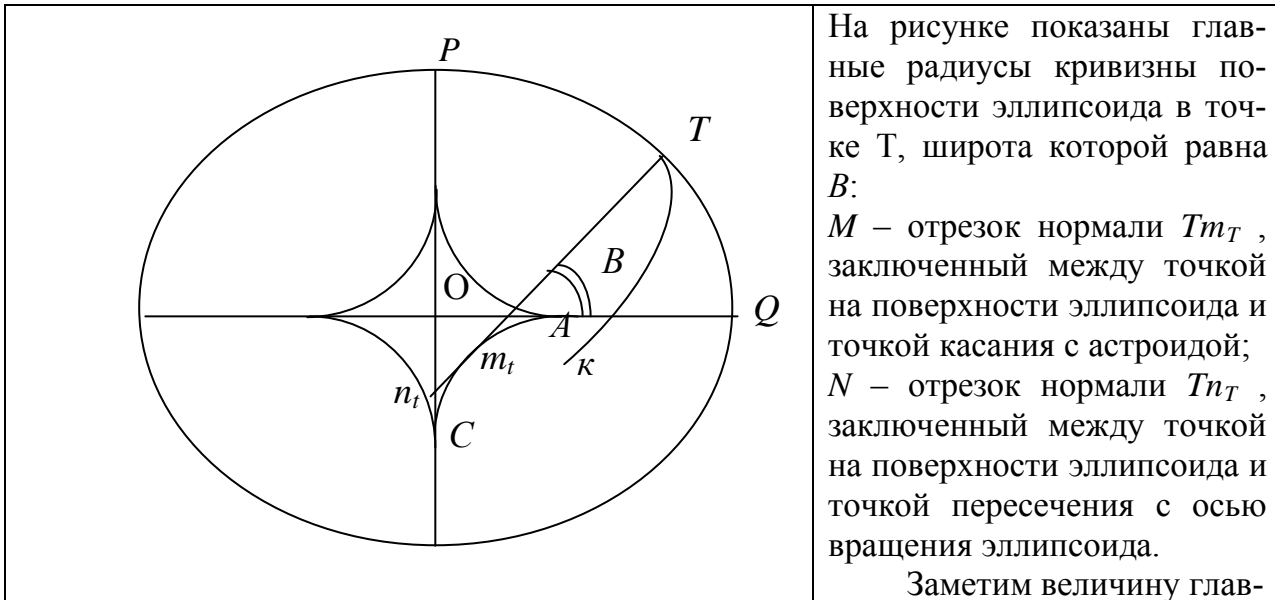


Рис. 4.3

На рисунке показаны главные радиусы кривизны поверхности эллипсоида в точке T, широта которой равна B:

M – отрезок нормали Tm_T , заключенный между точкой на поверхности эллипсоида и точкой касания с астроидой; N – отрезок нормали Tn_T , заключенный между точкой на поверхности эллипсоида и точкой пересечения с осью вращения эллипсоида.

Заметим величину глав-

ных радиусов кривизны для полярной точки P, в которой $B = 90^\circ$:

$$M_{B=90^\circ} = N_{B=90^\circ} = c = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \quad (4.13)$$

Эта величина носит название полярного радиуса кривизны эллипсоида и обозначается c. На рисунке 4.3 – это отрезок PC.

Для экваториальной точки Q, где $B = 0$ имеем соответственно:

$$M_{B=0} = \frac{a}{1-e^2}, \quad (4.14)$$

на рисунке отрезок QA;

$$N_{B=0} = a, \quad (4.15)$$

на рисунке отрезок QO.

Вообще говоря, ось вращения эллипсоида является геометрическим местом центров кривизны первых вертикалов, а астроида – геометрическим местом центров кривизны меридианов. Сравнивая численные значения главных радиусов кривизны, замечаем, что радиус меридиана меньше радиуса первого вертикала, следовательно, всегда кривизна поверхности эллипсоида минимальна вдоль первого вертикала, а максимальна – вдоль меридиана. На полюсе меридиан и первый вертикал совпадают.

4.4. Радиус произвольного нормального сечения. Средний радиус кривизны поверхности эллипсоида.

Кривизна поверхности эллипсоида в произвольном направлении определяется кривизной нормального сечения, проходящего в азимуте A и выражается уравнением Эйлера в функции главных радиусов кривизны

$$K_A = \frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \quad (4.16)$$

откуда несложно получить выражение для радиуса кривизны произвольного нормального сечения

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} \quad (4.17)$$

Данное выражение получим после несложных преобразований в виде

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A} \quad , \quad (4.18)$$

где $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$. Это обозначение принято в геодезии и будет использовано нами дальше.

Для решения целого ряда практических задач геодезии на территориях малых размеров с целью упрощения рабочих формул для вычислений поверхность эллипсоида заменяют поверхностью шара, радиус которого принимается равным среднему интегральному значению радиусов кривизны эллипсоида в данной точке. Некоторые из этих задач мы будем рассматривать дальше. Естественно, при этом важным является вопрос расчета точности вычислений.

Среднее интегральное значение для выражения (4.17) в точке будет зависеть только от азимута. При этом видно из выражения (4.17), что эта зависимость одинакова в четырех квадрантах, поэтому можем записать

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi/2} R_A dA \quad . \quad (4.19)$$

Подставляя выражение (4.17) в (4.18), разделим числитель и знаменатель подинтегральной функции на $N \cos^2 A$, в результате запишем

$$R = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{M}{\cos^2 A}}{1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 A} dA = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A} dA \quad (4.20)$$

Для приведения полученного выражения к табличному интегралу введем новую переменную по формуле

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A; dt = \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A} \quad ,$$

В результате имеем выражение, взамен (4.19)

$$R = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{MN} \left| \operatorname{arctg} t \right|_0^{\infty} = \sqrt{MN} \quad (4.21)$$

Как видим, средний радиус кривизны поверхности эллипсоида равен среднему геометрическому из главных радиусов кривизны. Подставляя в полученное выражение значения главных радиусов кривизны, имеем

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 B} = \frac{b}{W^2} \quad (4.22)$$

Полезно запомнить выражения для радиусов кривизны, если используется полярный радиус кривизны (4.13) и вторая функция широты (4.9).

$$M = \frac{c}{V^3}; N = \frac{c}{V}; R = \frac{c}{V^2}. \quad (4.23)$$

Вторую функцию широты можно также выразить через второй эксцентриситет в виде

$$V = \sqrt{1+e'^2 \cos^2 B} \quad (4.24)$$

4. 5. Длина дуги меридиана

Меридиан земного эллипсоида представляет собой эллипс, радиус кривизны которого определяется величиной M , зависящей от широты. Длина дуги любой кривой переменного радиуса может быть вычислена по известной формуле дифференциальной геометрии, которая применительно к меридиану имеет выражение

$$s = \int_{B_1}^{B_2} M dB = \int_{B_1}^{B_2} \frac{c}{V^3} dB = c \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{(1+e'^2 \cos^2 B)^{3/2}} \quad (4.25)$$

Здесь B_1 и B_2 широты, для которых определяется длина меридиана. Интеграл не берется в замкнутом виде в элементарных функциях. Для его вычисления возможны лишь приближенные методы интегрирования. При выборе метода приближенного интегрирования обратим внимание на то, что значение эксцентриситета меридианного эллипса величина малая, поэтому здесь возможно применить метод, основанный на разложении в ряд по степеням малой величины ($e'^2 \cos^2 B < 7 \cdot 10^{-3}$) биномиального выражения, стоящего под знаком интеграла. Число членов разложения будет зависеть от необходимой точности вычисления длины дуги меридиана, а также от разности широт ее конечных точек.

В геодезической практике могут возникать различные случаи, чаще приходится производить вычисления для малых длин (до 60 км), но для специальных целей может возникнуть потребность вычислений дуг меридианов большой длины: от экватора до текущей точки (до 10 000 км), между полюсами (до 20 000 км). Необходимая точность вычислений может достигать величины в 0.001 м. Поэтому мы рассмотрим вначале общий случай, когда разность широт может достигать 180° , а длина дуги 20 000 км.

Для разложения в ряд биномиального выражения применяем известную из математики формулу.

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (4.26)$$

Погрешность вычисления с удержанием m членов разложения здесь достаточно определить с помощью остаточного члена в форме Лагранжа, который не меньше по абсолютной величине суммы всех отброшенных членов разложения и вычисляется по формуле

$$\rho_m (1 \pm x)^n = \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{(m+1)!} x_{\max}^{(m+1)}, \quad (4.27)$$

как первый из отброшенных членов разложения, вычисленный при максимально возможном значении величины x .

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} (1 + e^{1/2} \cos^2 B)^{-3/2} = & 1 - \frac{3}{2} e^{1/2} \cos^2 B + \frac{3*5}{2*4} e^{1/4} \cos^4 B - \frac{3*5*7}{2*4*6} e^{1/6} \cos^6 B + \\ & + \frac{3*5*7*9}{2*4*6*8} e^{1/8} \cos^8 B - \frac{3*5*7*9*11}{2*4*6*8*10} e^{1/10} \cos^{10} B + \dots \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (4.25), получим

$$\begin{aligned} s = c \int_{B_1}^{B_2} & \left(1 - \frac{3}{2} e^{1/2} \cos^2 B + \frac{3*5}{2*4} e^{1/4} \cos^4 B - \frac{3*5*7}{2*4*6} e^{1/6} \cos^6 B + \right. \\ & \left. + \frac{3*5*7*9}{2*4*6*8} e^{1/8} \cos^8 B - \frac{3*5*7*9*11}{2*4*6*8*10} e^{1/10} \cos^{10} B + \dots \right) dB \end{aligned} \quad (4.28)$$

которое допускает почленное интегрирование с удержанием необходимого числа членов разложений. Предположим, что длина дуги меридиана может достигать величины 10 000 км (от экватора до полюса), что соответствует разности широт $\Delta B = \pi/2$, при этом требуется ее вычислить с точностью до 0.001 м, что будет соответствовать относительной величине 10^{-10} . Значение $\cos B$ в любом случае не превзойдет единицы. Если при вычислениях будем удерживать третьи степени разложения, то остаточный член в форме Лагранжа имеет выражение

$$\rho_3(s) = \frac{3*5*7*9}{2*4*6*8} e^{1/8} \approx 5*10^{-9}$$

Как видим, для достижения необходимой точности такого числа членов разложения недостаточно, необходимо удерживать четыре члена разложения и остаточный член в форме Лагранжа будет иметь выражение

$$\rho_4(s) = \frac{3 * 5 * 7 * 9 * 11}{2 * 4 * 6 * 8 * 10} e^{/10} \approx 3.4 * 10^{-12}$$

Следовательно, при интегрировании необходимо удерживать в данном случае четыре степени разложения.

Почленное интегрирование (4 . 28) не вызывает труда, если преобразовать четные степени в кратные дуги ($\cos^{2n} B \rightarrow \text{Cos}(2nB)$), используя известную формулу косинуса двойного аргумента

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = 2 \cos^2 B - 1 ; \cos^2 B = (1 + \cos 2B)/2,$$

последовательно применяя которую, получаем

$$\cos^4 B = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B ;$$

Действуя таким образом до $\cos^8 B$, получим после несложных преобразований и интегрирования

$$s = n_1(B_2 - B_1) - n_2 \sin 2(B_2 - B_1) + n_3 \sin 4(B_2 - B_1) - n_4 \sin 6(B_2 - B_1) + \dots \quad (4. 29)$$

Здесь разность широт берется в радианной мере и приняты следующие обозначения коэффициентов, имеющих постоянные значения для эллипсоида с данными параметрами.

$$n_1 = c \left(1 - \frac{3}{4} e^{/2} + \frac{45}{64} e^{/4} - \frac{175}{256} e^{/6} + \frac{11025}{16384} e^{/8} - \dots \right); \quad n_2 = \frac{3}{8} c e^{/2} \left(1 - \frac{5}{4} e^{/2} + \frac{175}{128} e^{/4} - \frac{105}{64} e^{/6} + \dots \right);$$

$$n_3 = \frac{15}{256} c e^{/4} \left(1 - \frac{7}{4} e^{/2} + \frac{147}{64} e^{/4} - \dots \right); \quad n_4 = \frac{35}{3072} c e^{/6} \left(1 - \frac{9}{4} e^{/2} + \dots \right).$$

Полезно запомнить, что длина дуги меридиана с разностью широт в один градус примерно равна 111 км, в одну минуту – 1. 8 км, в одну секунду – 0. 031 км.

В геодезической практике очень часто возникает необходимость вычисления дуги меридиана малой длины (порядка длины стороны треугольника триангуляции), в условиях Беларуси это значение не превзойдет величины в 30 км. В этом случае нет необходимости применять громоздкую формулу (4. 29), а можно получить более простую, но обеспечивающую такую же точность вычислений (до 0. 001 м).

Пусть широты конечных точек на меридиане будут B_1 и B_2 соответственно. Для расстояний до 30 км это будет соответствовать разности широт в радианной мере, не более 0. 27. Вычисляя среднюю широту B_m дуги меридиана по формуле $B_m = (B_1 + B_2) / 2$, принимаем дугу меридиана за дугу окружности радиусом

$$M_m = \frac{c}{V_m} = \frac{c}{(1 + \cos^2 B_m)^{\frac{3}{2}}} \quad (4. 30)$$

и ее длину вычисляем по формуле длины дуги окружности

$$S = M_m (B_2 - B_1) \quad , \quad (4.31)$$

где разность широт берется в радианной мере.

4. 6. Длина дуги параллели

Радиус параллели, как видно из формулы (4. 10), не зависит от долготы и для данной параллели имеет постоянное значение (параллель – окружность), поэтому для вычисления длины дуги параллели применяют формулу

$$s_{\text{пар.}} = r (L_2 - L_1) = \frac{c}{V} \cos B (L_2 - L_1) \quad , \quad (4.32)$$

здесь разность долгот берется в радианной мере.

В отличие от меридиана, длина дуги параллели, соответствующая одинаковой разности долгот, различается. Если на экваторе эти значения близки к тому, что имеет место на меридиане, то, например, на широте в 60° ($\cos 60^\circ = 0.5$) они будут в два раза меньше.

4. 7. Площадь сфероидической трапеции. Размеры рамок трапеций топографических карт

Трапеция топографической карты любого масштаба является отображением на плоскости в соответствующей проекции (цилиндрической Гаусса – Крюгера, конической Ламберта и др) сфероидической трапеции, ограниченной меридианами и параллелями с соответствующей разграфке масштабных рядов разностью долгот и широт. Например, для масштаба 1 : 1 000 000 у нас в стране эти разности приняты соответственно в 6° и 4° . В других странах принята иная разграфка, например, для близ экваториальных стран приняты обе разности в 4° . В любом случае стремятся к тому, чтобы линейные размеры трапеций карт любого масштаба были бы примерно одинаковыми.

Пусть мы имеем такую сфероидическую трапецию. Тогда площадь поверхности эллипсоида, ограниченная парами меридианов и параллелей определяется двойным интегралом

$$T = \iint_{B L} MN \cos B dBdL = c^2 \iint_{B L} \frac{\cos B}{V^4} dBdL = c^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1 + e'^2 \cos^2 B)^2}$$

Подынтегральное выражение преобразуем. Для этого перейдем к первому эксцентриситету по известной формуле $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$, в результате получим

$$T = b^2 (L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B dB}{(1 - e^2 \sin^2 B)^2} \quad (4.33)$$

Используя новую переменную по формуле $e \sin B = \sin Q$, будем иметь $\cos B dB = (\cos Q dQ) / e$.

В результате имеем после очевидных преобразований и интегрирования

$$T = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dQ}{\cos^3 Q} = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \left(\frac{\sin Q}{2 \cos^2 Q} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin Q}{2} \right) \right| \right) \Bigg|_{Q_1}^{Q_2} \quad (4.34)$$

Возвращаясь от переменной Q к широте B , получим

$$T = \frac{b^2}{e} (L_2 - L_1) \left(\frac{e \sin B}{2W^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{e \sin B}{2} \right) \right| \right) \Bigg|_{B_1}^{B_2} \quad (4.35)$$

Вычисление площади по полученной формуле производится при условии, что разность долгот берется в радианной мере. При этом точность вычислений зависит только от их разрядности, так как формула (4.35) строгая. В учебниках старых изданий приведена другая формула для вычислений площади трапеции, полученная путем разложения биномиального выражения под знаком интеграла (4.33) в ряд, что в настоящее время с наличием современной вычислительной техники неактуально.

Прежде чем приступить к формулам для вычислений размеров рамок топографических карт, полезно заметить следующее. Во – первых, эти размеры нужны для вычерчивания рамок соответствующего масштаба карт, когда предельная графическая точность равна 0.1 мм в масштабе карты. Например, для масштаба карты 1 : 1 000 000 это будет соответствовать на местности величине в 100 м, а для самого крупного масштаба карты 1 : 10 000, соответственно 1 м. Во – вторых, не сложно убедиться, что линейные размеры трапеций карты любого масштаба примерно одинаковы и не превосходят величины 50 x 50 см. В – третьих, численные значения размеров рамок нужны для их нанесения на планшет и вычерчивания с графической точностью (до 0.1 мм). Таким образом мы видим, что в любом случае при вычислениях необходимо учитывать не более четырех значащих цифр.

На рисунке 4.4 показана трапеция топографической карты, у которой осно-

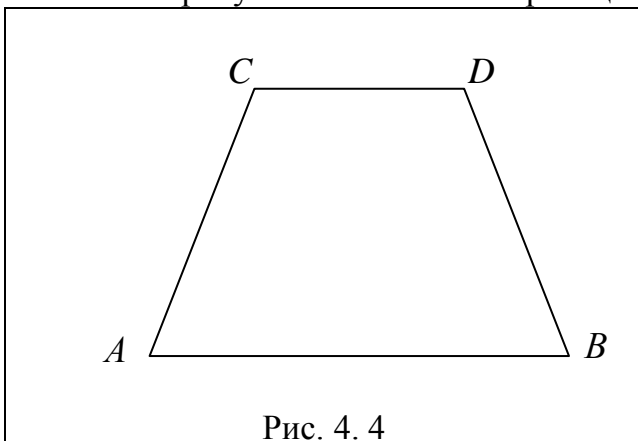


Рис. 4.4

ваниями являются изображения на плоскости параллелей, а боковыми сторонами – изображения меридианов эллипсоида.

Для вычисления их длин воспользуемся ранее полученными формулами для малой дуги меридиана и параллели (4.31, 4.32), при этом будем иметь в виду, что карта масштаба $1 : m$, линейные параметры эллипсоида даны в метрах. С учетом этого имеем

$$AC = BD = c_{(cm)} = \frac{100}{m} M_{m(m)} \frac{\Delta B''}{\rho''};$$

$$AB = d_{1(cm)} = \frac{100}{m} N_{A(m)} \cos B_A \frac{\Delta L''}{\rho''}; CD = d_{2(cm)} = \frac{100}{m} N_{C(m)} \cos B_C \frac{\Delta L''}{\rho''} \quad (4.36)$$

4. 8. Система дифференциальных уравнений геодезической линии

На рисунке 4. 5 имеем полярный сфероидический треугольник PTK ,

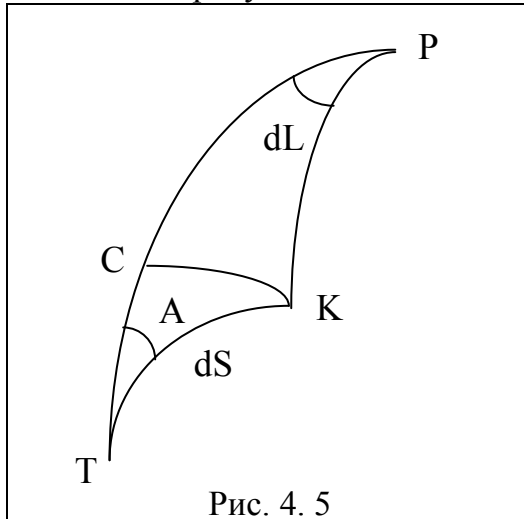


Рис. 4. 5

у которого P – полюс, T и K – бесконечно близкие друг другу точки, соединенные элементарной дугой геодезической линии dS , проходящей через точку T в азимуте A . Через точку K (широта которой равна B) проведем параллель, которая пересечет меридиан точки T в некоторой точке C .

Рассмотрим элементарный прямоугольный треугольник TCK у которого все стороны будут бесконечно малы потому, что гипотенуза dS по условию бесконечно мала. Этот треугольник решаем как плоский прямоугольный, при этом будем иметь в виду, что элементарная

дуга меридиана TC равна $M dB$, а параллели CK - rdL , где dL – разность долгот точек K и T . В результате можем записать.

$$M dB = dS \cos A; \quad r dL = dS \sin A, \quad (4.37)$$

откуда получаем дифференциальные зависимости

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}; \quad \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{r}. \quad (4.38)$$

Обратимся теперь к треугольнику PTK . Не смотря на то, что одна из его сторон TK бесконечно мала, стороны PT и PK могут достигать значительных величин, зависящих от значения широты точки T . В этом случае мы можем рассматривать его как сферический и решать по формулам сферической тригонометрии. Рассмотрим элементы этого треугольника. Угол при вершине P равен dL , при вершине T – азимут A , сторона PT выражается на сфере единичного радиуса как $(\pi / 2 - B)$. Угол этого треугольника при вершине K можем определить как $(\pi - A - dA)$, так как азимут геодезической линии в точке K равен $(A + dA)$.

Применяя теорему косинуса угла для решения сферического треугольника PTK , имеем

$$\cos(\pi - A - dA) = -\cos A \cos dL + \sin A \sin dL \cos(\pi / 2 - B)$$

$$-\cos(A + dA) = -\cos A \cos dL + \sin A \sin dL \sin B$$

Применяя формулу для косинуса суммы и разлагая синусы и косинусы бесконечно малых аргументов в ряд и ограничиваясь первыми членами разложений, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dA}{dL} = \sin B,$$

в котором выражаем dL из второго уравнения (4. 38) в функции dA и запишем систему трех дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида в виде

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}; \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{r}; \frac{dA}{dS} = \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B \quad (4. 39)$$

4. 9. Уравнение Клеро для геодезической линии

Система дифференциальных уравнений (4. 39) имеет очень большое значение. Оно лежит в основе решения задач сфероидической геодезии при определении связи между полярными координатами A и S и параметрическими координатами B и L на поверхности земного эллипсоида. Решение этих задач производится по формулам, следующим из интегрирования системы (4. 39).

Французский математик и геодезист Клеро в 1773 году взял первый интеграл системы вида (4. 39), описывающей геодезические линии на поверхностях вращения. Полученное уравнение в математике носит название уравнение Клеро для геодезических линий на поверхностях вращения.

Для вывода этого уравнения на поверхности земного эллипсоида перейдем в системе (4. 39) от геодезической широты B к приведенной широте u по ранее полученной формуле (3. 9) и формулам, следующим из нее:

$$\operatorname{ctg} B = \sqrt{1-e^2} \operatorname{ctg} u; \sin B = V \sin u; dB = \frac{\sqrt{1-e^2}}{V^2} du; V = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 u}};$$

с учетом этого система (4. 39) примет вид

$$\frac{du}{dS} = \frac{V}{a} \cos A; \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{a \cos u}; \frac{dA}{dS} = \frac{V}{a} \operatorname{tg} u \sin A \quad (4. 40)$$

Разделив третье уравнение этой системы на первое, получим после очевидных преобразований

$$\operatorname{ctg} A dA = \operatorname{tg} u du; \frac{\cos A dA}{\sin A} = \frac{\sin u du}{\cos u}$$

Интегрируя полученное уравнение, приходим к уравнению

$$\int \frac{d(\sin A)}{\sin A} + \int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = \ln(\sin A) + \ln(\cos u) = \ln(\sin A \cos u) = \ln c,$$

откуда получаем уравнение Клеро для геодезической линии на поверхности земного эллипсоида

$$\sin A \cos u = C \quad (4.41)$$

Данное уравнение носит название теоремы Клеро, согласно которой произведение синуса азимута на косинус приведенной широты в каждой точке геодезической линии – величина постоянная.

Заметим геометрический смысл постоянной C в уравнении (4.41). Полагая $u = 0$ (экваториальная точка), имеем $C = \sin A_0$; при $A = 90^\circ$ (наиболее удаленная от экватора точка – **точка вертекса**) имеем $C = \cos u_B$.

При использовании уравнения (4.41) для вычислений широты по азимуту и наоборот заметим уравнение связи широт, следующее из (3.9)

$$\cos u = \frac{\cos B}{W}$$

Если речь идет о двух фиксированных точках на поверхности эллипсоида, то справедливо будет уравнение связи

$$\frac{\sin A_{12} \cos B_1}{W_1} = \frac{\sin A_{21} \cos B_2}{W_2}$$

5. РЕШЕНИЕ СФЕРОИДИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

5. 1. Общие сведения о решении треугольников

Основным видом построений в государственных геодезических сетях являются треугольники триангуляции и трилатерации. Для того, чтобы использовать эти треугольники для передачи координат от исходных к определяемым пунктам необходимо знать как длины их сторон, так и внутренние углы. В процессе предварительных вычислений вводят поправки в измеренные углы (в триангуляции) и длины сторон (в трилатерации) за редуцирование с физической поверхности Земли на поверхность эллипсоида. В результате получают **сфероидические треугольники**, сторонами которых служат геодезические линии эллипсоида.

Возникает необходимость решения этих треугольников. При этом в триангуляции по измеренным углам и длине одной из сторон треугольника вычисляют стороны всех треугольников сети. В трилатерации – по измеренным длинам сторон вычисляют углы треугольников. Проблема решения этой задачи заключается в том, что не существует формул сфероидической тригонометрии, подобных формулам плоской и сферической тригонометрии. Вместе с тем замечаем: во – первых, полярное сжатие земного эллипсоида величина малая, во – вторых, длины сторон сфероидических треугольников – малые величины по сравнению с радиусом кривизны эллипсоида.

Ранее мы получили выражение для среднего радиуса кривизны эллипсоида $R = \sqrt{MN}$. В связи с этим возникает вопрос, при каких условиях для решения треугольников можно заменить область на поверхности эллипсоида соответствующей областью на поверхности шара, если его радиус принять равным R_0 , вычисленным по средней широте B_0 данной области эллипсоида. Другими словами, когда элементы сфероидического треугольника будут с необходимой точностью соответствовать элементам сферического треугольника. В этом случае треугольники можно решать как сферические. Исследования показывают, что такое возможно, если сеть треугольников располагается в сфероидическом поясе шириной до 300 км или на удалении от параллели с широтой B_0 до 150 км. В этом случае длины сторон треугольников первого и последующих классов будут отличаться на величину, не более 0. 001 м, а углы – 0. 001". При пониженных требованиях к необходимой точности решения треугольников ширина пояса увеличивается, например, при точности, на порядок ниже, ширина пояса может достигать 570 км.

Решение треугольников по формулам сферической тригонометрии не совсем удобно на практике, когда длины сторон нужно выражать в долях радиуса (S/R_0), поэтому в геодезии применяют методы решения малых сферических треугольников по формулам плоской тригонометрии, основанным на теореме Лежандра и способе аддитивентов.

5. 2 . Теорема Лежандра

Пусть мы имеем сферический треугольник ABC на сфере радиуса R_0 . Возьмем плоский треугольник $A'B'C'$ с соответственно равными сторонами (рис. 5. 1). Углы этих треугольников, расположенные против соответственно равных сторон, не будут равны соответствующим углам сферического треугольника.

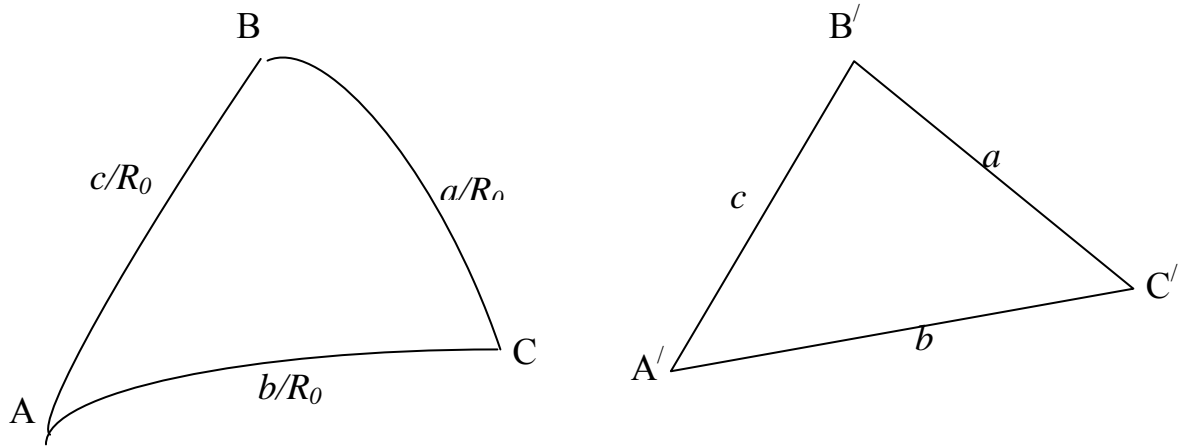


Рис. 5. 1

Применяя теорему косинуса стороны для сферического треугольника ABC, запишем

$$\cos \frac{a}{R_0} = \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0} + \sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0} \cos A, \quad (5.1)$$

откуда можем выразить

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{R_0} - \cos \frac{b}{R_0} \cos \frac{c}{R_0}}{\sin \frac{b}{R_0} \sin \frac{c}{R_0}}. \quad (5.2)$$

Стороны треугольника малы по сравнению с радиусом R_0 , поэтому тригонометрические функции малых аргументов разложим в ряд Маклорена, ограничиваясь четвертыми степенями аргументов s/R_0 , в результате получим вместо (5.2)

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2R_0^2} + \frac{a^4}{24R_0^4} - \left(1 - \frac{b^2}{2R_0^2} + \frac{b^4}{24R_0^4}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2R_0^2} + \frac{c^4}{24R_0^4}\right)}{\left(\frac{b}{R_0} - \frac{b^3}{6R_0^3}\right) \left(\frac{c}{R_0} - \frac{c^3}{6R_0^3}\right)} \quad (5.3)$$

Заметим, что наибольший из отброшенных членов разложений в (5.3) будет $\frac{s^5}{120R_0^5}$. Поставим условие, чтобы он не превосходил величины $5 \cdot 10^{-10}$, что

соответствует точности вычисления углов в $0.0001''$, тогда получаем предельные длины сторон треугольника, для которого (5.3) будет обеспечивать требуемую

точность $\frac{s^5}{120R_0^5} \leq 5 \cdot 10^{-10}$, $s \leq R_0 \cdot 10^{-2} (600)^{1/5} \approx 230 \text{ км}$. Преобразуем

выражение (5.3) с принятой точностью

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{-\frac{a^2}{2R_0^2} + \frac{a^4}{24R_0^4} + \frac{b^2}{2R_0^2} - \frac{b^4}{24R_0^4} + \frac{c^2}{2R_0^2} - \frac{c^4}{24R_0^4} - \frac{b^2c^2}{4R_0^4}}{\frac{bc}{R_0^2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2}\right)} = \\ &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R_0^2bc} \right) \left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2}\right) = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2}{24R_0^2bc} + \frac{b^2 + c^2}{6R_0^2} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)\end{aligned}$$

Откуда несложно получить после приведения подобных членов

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24R_0^2bc} \quad (5.4)$$

Обратимся теперь к плоскому треугольнику на рис. 5. 1. Для него можем записать по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'; \cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

И выражение для $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$\sin^2 A' = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2}.$$

С учетом этого выражение (5. 4) принимает вид

$$\cos A - \cos A' = -\frac{bc \sin^2 A'}{6R_0^2} \quad (5.5)$$

Преобразуя разность косинусов в произведение и полагая

$$\sin \frac{A - A'}{2} = \frac{A - A'}{2}; \sin \frac{A + A'}{2} = \sin A',$$

получим вместо (5. 5) для разности сферического и соответствующего плоского углов выражение

$$A - A' = \frac{bc \sin A'}{6R_0^2}$$

Несложно заметить, что $P = -\frac{bc \sin A'}{2}$ выражает площадь треуголь-

ника, поэтому для разности любых углов сферического и плоского треугольников справедливы выражения

$$A - A' = B - B' = C - C' = \frac{P}{3R_0^2}$$

Поскольку сумма внутренних углов плоского треугольника всегда равна π , можем записать для суммы углов сферического треугольника

$$A + B + C = \pi + \frac{P}{R_0^2} \quad (5.6)$$

Величина, определяющая в (5.6) насколько сумма внутренних углов сферического треугольника больше π , носит название сферического избытка и обозначается ε . Отсюда следует вывод, что сферический избыток треугольника (как и любого многоугольника на сфере) прямо пропорционален площади и обратно пропорционален квадрату радиуса сферы, что и выражает **теорему Лежандра**. При этом каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на величину одной трети сферического избытка (для n -угольника – больше на величину ε/n).

Сферический избыток может достигать в общем случае величины до 2π . Для малых треугольников, которые мы рассматриваем, эта величина малая и ее выражают в секундах, поэтому формула для вычисления сферического избытка имеет вид

$$\varepsilon'' = \frac{\rho''}{R_0^2} P \quad (5.7)$$

Для вычисления площади P треугольника можно применять любую формулу. Так для треугольников триангуляции, когда известна только одна сторона удобнее формулы вида

$$P = a^2 \frac{\sin B' \sin C'}{\sin A'} \frac{\rho''}{2R_0^2} = b^2 \frac{\sin A' \sin C'}{\sin B'} \frac{\rho''}{2R_0^2} = c^2 \frac{\sin B' \sin A'}{\sin C'} \frac{\rho''}{2R_0^2} \quad (5.8)$$

В трилатерации измерены длины сторон, а углы неизвестны, поэтому здесь более удобно вычислять площадь треугольника по формуле Герона

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; p = \frac{1}{2}(a+b+c) \quad (5.9)$$

Из формулы (5.7) видно, что наибольший сферический избыток (при заданном порядке длин сторон) будет иметь равносторонний треугольник. Несложно подсчитать, что сферический избыток для различных длин сторон геодезических треугольников не превзойдет следующих величин: при $s_{\text{км}} = 5, 10, 20, 30, 60$ - $\varepsilon'' = 0.07, 0.25, 1.0, 2.0, 8.0$ соответственно. Величина $f = \rho'' / 2R^2$ изменяется с широтой очень медленно. Учитывая, что сферический избыток даже в сети 1 класса с длинами сторон до 60 км не превышает $8''$, а точность вычисления углов – $0.001''$, при его вычислении достаточно удерживать четыре верные значащие цифры. Это

значит, что при его вычислении можно пренебречь различием площадей сферического и плоского треугольников, а величину f можно считать постоянной и равной для всей территории Республики Беларусь ($f = 2.530 \cdot 10^{-9}$), если длины сторон выражены в метрах.

5.3. Порядок решения треугольников по теореме Лежандра

В условиях Республики Беларусь длины сторон триангуляции 1 класса не превышают величины 30 км. Порядок решения сети треугольников триангуляции по теореме Лежандра будет следующим:

- определяют порядок решения треугольников сети так, чтобы последовательно производилась передача длин сторон из треугольника в треугольник, в конечном итоге замыкалась на исходную сторону;
- по длине стороны и измеренным углам вычисляют сферический избыток по формулам (5.7) – (5.8) в триангуляции 1 класса с округлением до $0.001''$, в триангуляции 2 класса – до $0.01''$;
- вычитают из измеренных значений углов треугольника одну треть сферического избытка – получают измеренные приведенные плоские углы;
- вычисляют невязку треугольника и вычитают одну треть ее из каждого угла – получают уравненные плоские приведенные углы треугольника;
- по теореме синусов плоской тригонометрии вычисляют неизвестные две стороны треугольника с контролем

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}; c = a \frac{\sin C}{\sin A} = b \frac{\sin C}{\sin B}$$

расхождение значений стороны c , полученное в треугольнике дважды, не должно превышать 0.001 м.

В том случае, когда решаются треугольники, объединенные в сеть, необходимо последний из решаемых треугольников выбрать так, чтобы он примыкал к первому. И в этом случае контролем правильного решения будет условие, что расхождение в длине стороны, полученной дважды, не превышает величины 0.001 м.

Если решаются треугольники трилатерации, порядок следующий:

- вычисление плоских приведенных углов треугольников по формулам

$$\operatorname{tg} \frac{A'}{2} = \frac{P}{p(p-a)}; \operatorname{tg} \frac{B'}{2} = \frac{P}{p(p-b)}; \operatorname{tg} \frac{C'}{2} = \frac{P}{p(p-c)};$$

- вычисление сферического избытка по формулам (5.7) и (5.9);
- вычисление сферических углов треугольников по формулам

$$A = A' + \frac{\varepsilon''}{3}; B = B' + \frac{\varepsilon''}{3}; C = C' + \frac{\varepsilon''}{3}.$$

5. 4. Способ аддитанентов для решения треугольников

Для треугольника ABC рис. 5. 1 можем записать по теореме синусов сферической тригонометрии

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{R_0}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{R_0}} . \quad (5.10)$$

Далее представляем синусы малых аргументов в виде разложений в ряд по формуле Маклорена с той же точностью, что и в способе Лежандра, в результате получаем

$$\frac{b}{R_0} - \frac{b^3}{6R_0^3} = \left(\frac{a}{R_0} - \frac{a^3}{6R_0^3} \right) \frac{\sin B}{\sin A} ; \quad b - \frac{b^3}{6R_0^2} = \left(a - \frac{a^3}{6R_0^2} \right) \frac{\sin B}{\sin A} . \quad (5.11)$$

Несложно заметить, что для любого класса триангуляции или трилатерации величины, вычитаемые из длин сторон (b, a), малые и их называют аддитанентами. Например, для длин сторон $s \leq 60\ 000\text{м}$ имеем аддитаненты $A_s = s^3 / 6R_0^2 \leq 0.001\text{м}$. С учетом этого можем записать вместо (5.11) для приведенных длин сторон выражение в виде теоремы синусов плоской тригонометрии

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A} . \quad (5.12)$$

Отсюда видно, если в сферическом треугольнике из исходной стороны вычесть аддитаненту, получив ее приведенную длину, приведенные длины других сторон можем вычислить по теореме синусов плоской тригонометрии, если использовать уравненные сферические углы треугольника. На практике способ аддитанентов для решения треугольников используют, как правило, для контроля решения способом Лежандра.

Таким образом замечаем порядок решения сферических треугольников по способу аддитанентов.

В триангуляции:

- получают уравненные сферические углы треугольников, для чего из способа Лежандра берут уравненные плоские углы плюс одна треть сферического избытка;
- вычисляют аддитаненту исходной стороны по формуле $A_a = \frac{a^3}{6R_0^2}$;
- вычисляют приведенную длину исходной стороны по формуле $a' = a - A_a$;
- по теореме синусов плоской тригонометрии вычисляем приведенные длины определяемых сторон с контролем

$$b' = a' \frac{\sin B}{\sin A}; c' = a' \frac{\sin C}{\sin A} = b' \frac{\sin C}{\sin B};$$

- вычисляем аддитаменты определяемых сторон

$$A_b = \frac{b'^3}{6R_0^2}; A_c = \frac{c'^3}{6R_0^2}$$

- и точные значения сторон сферического треугольника

$$b = b' + A_b; c = c' + A_c$$

При вычислении аддитаментов можно использовать как точные, так и приведенные длины сторон. В этом случае для любого класса триангуляции будет обеспечена необходимая точность вычислений сторон как и в способе Лежандра. Действуя последовательно, решают любое число треугольников.

В трилатерации:

- вычисляют аддитаменты A_s всех сторон треугольников и их приведенные длины s' ;
- по теореме косинусов плоской тригонометрии вычисляют сферические углы треугольников
-

$$\cos A = \frac{a'^2 - b'^2 - c'^2}{2b'c'}; \cos B = \frac{b'^2 - a'^2 - c'^2}{2a'c'}; \cos C = \frac{c'^2 - b'^2 - a'^2}{2b'a'}$$

Действуя последовательно, решают любое число треугольников.

6. ГЛАВНАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

6. 1. Общие сведения о решении главной геодезической задачи на поверхности эллипсоида

Основной задачей геодезии является определение координат точек земной поверхности и околоземного пространства. Координатной поверхностью в геодезии, как известно, является поверхность земного эллипсоида. Таким образом, задача сводится к вычислению сфероидических координат по результатам спутниковых, астрономических, гравиметрических и геодезических измерений с использованием геометрии земного эллипсоида.

Как отмечалось ранее, на поверхности земного эллипсоида приняты две системы геодезических координат – параметрическая (широты и долготы, пространственные прямоугольные) и полярная (азимуты и расстояния). В результате спутниковых и астрономических измерений и их редуцирования на поверхность эллипсоида получают пространственные прямоугольные координаты, геодезические широты, долготы точек и азимуты направлений. Геодезические измерения, выполненные в триангуляции, трилатерации, полигонометрии и их сочетаниях, после редуцирования на поверхность эллипсоида дают длины геодезических линий между точками эллипсоида и углы между ними. Точность редуцированных вычислений всегда на порядок выше точности измерений соответствующих величин, поэтому при их математической обработке считают величины на эллипсоиде измеренными.

Сущность главной геодезической задачи сводится к установлению связи между системой параметрических и полярных координат на поверхности эллипсоида. Формулы связи пространственных прямоугольных координат и геодезических широт, долгот и высот нами рассмотрены ранее. Поэтому при рассмотрении методов решения главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида под параметрическими координатами мы будем понимать геодезические широты и долготы. В основе решения главной геодезической задачи лежит полярный сфероидический треугольник PAB (рис. 6. 1). Различают **прямую и обратную геодезические задачи**.

Прямая геодезическая задача: по известным геодезическим широте (B_1) и долготе (L_1) одной точки, длине (S_{12}) и азимуту (A_{12}) геодезической линии до другой точки вычислить геодезические широту (B_2) и долготу (L_2) другой точки, а также обратный азимут (A_{21}).

Здесь требуется вычислить параметрические координаты определяемой точки, обратный азимут по ее полярным координатам, отсчитанным от исходной точки.

Обратная геодезическая задача: по известным геодезическим широтам (B_1, B_2) и долготам (L_1, L_2) двух точек вычислить прямой и обратный азимуты (A_{12}, A_{21}) и длину геодезической линии между ними (S_{12}).

Здесь по известным параметрическим координатам двух точек вычисляются связывающие их полярные координаты.

Если бы шла речь о решении главной геодезической задачи на сфере единичного радиуса, то применимы формулы сферической тригонометрии для решения полярного сферического треугольника. При этом, как в прямой, так и в обратной задачах необходимо в треугольнике по трем известным элементам вычислить три неизвестные. Здесь задача решается однозначно и точность ее решения зависит только от формата вычислений.

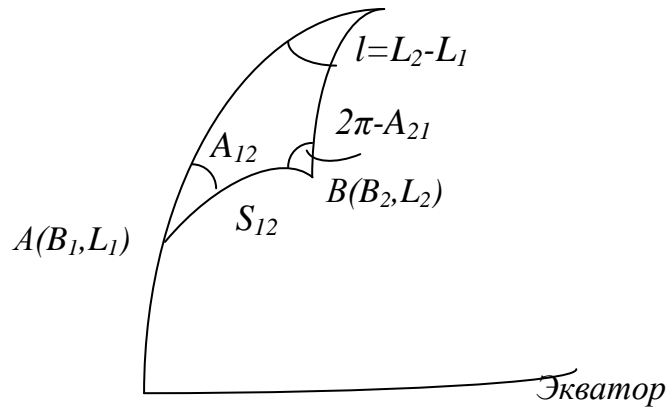


Рис. 6. 1.

Замкнутых формул сфероидической тригонометрии не существует, поэтому решение главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида производится приближенными методами, в основе которых лежат различные пути приближенного интегрирования системы дифференциальных уравнений для геодезической линии эллипсоида вращения (4. 39), которую запишем в следующем виде

$$b = B_2 - B_1 = \int_0^s \frac{\cos A}{M} ds; l = L_2 - L_1 = \int_0^s \frac{\sin A}{r} ds; a = A_{21} - A_{12} \pm \pi = \int_0^s \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B ds. \quad (6. 1)$$

При выборе этих путей следует иметь в виду, что сжатие земного эллипсоида величина малая, а расстояния между точками, для которых необходимо решать задачу могут существенно различаться. Так при решении прямой задачи это расстояние ограничивается дальностью действия геодезических приборов (теодолитов, дальномеров, спутниковых и других навигационных систем). При решении обратной задачи при полигональном уравнивании геодезических построений – длинами первоклассных звеньев, в навигации – расположением начальных и конечных пунктов дистанции. Немецкий астроном и геодезист Ф. Гельмерт предложил следующую градацию расстояний в геодезии:

- малые – (S / R) ≤ 0. 01 (до 60 км);
- средние – 0. 01 < (S / R) ≤ 0. 1 (от 60 до 600 км);
- большие - (S / R) > 0. 1 (от 600 до 20 000 км).

С развитием науки и техники точность и дальность действия геодезических приборов возрастает, совершенствуются измерительные технологии, методы их математической обработки и представления на основе автоматизации с широким применением ЭВМ. В связи с этим в настоящее время главная геодезическая задача должна с необходимой точностью решаться на любые расстояния, для чего разработаны соответствующие алгоритмы ее решения на ЭВМ.

Вместе с тем полезно проследить, как в историческом аспекте формировались знания в этой области. Следует отметить, что при вычислениях вручную с использованием малой вычислительной техники (арифмометров, калькуляторов) и специальных таблиц, весьма важным фактором являлся объем вычислений. При этом наиболее часто возникала практическая потребность в решении прямой и обратной задач на малые расстояния, реже на средние и исключительно редко на большие расстояния. При этом необходимая точность решения задач понижалась с

возрастанием расстояний. Это определялось уровнем развития измерительных технологий и потребностями в геодезическом обеспечении навигационных средств.

В связи с этим различают два пути решения главной геодезической задачи: прямой и косвенный. В прямом пути предполагается вычисление значений искомых величин по известным. В косвенном пути вычисляются разности между известными и искомыми величинами, которые затем вводятся в соответствующие значения известных величин для вычисления искомых. Наибольший эффект по сокращению объема вычислений вручную достигается применением косвенного пути решения задачи на малые расстояния, когда разности координат исходного и определяемого пунктов – величины малые и число значащих цифр при их вычислениях вручную существенно меньше.

Известны различные методы решения главной геодезической задачи, но все они приводят к разложению в ряды по степеням малых величин S/R и эксцентриситета меридианного эллипса. Понятно, что только при малых расстояниях разложения в ряды по степеням S/R дают эффект, в других случаях применимы только ряды по степеням эксцентриситета, сходимость которых практически не зависит от расстояний. В этом контексте мы рассмотрим наиболее известные два метода решения главной геодезической задачи.

6. 2. О точности вычислений в решении главной геодезической задачи

Как уже отмечалось ранее, точность любых геодезических вычислений должна быть на порядок выше точности измерений. Так масштабирование государственных геодезических сетей триангуляции 1 класса обеспечивается с относительной погрешностью $1 : 400\,000 = 2.5 \cdot 10^{-6}$, точность геодезических азимутов на пунктах Лапласа $0.5'' = 2.5 \cdot 10^{-6}$, следовательно, точность вычисления этих величин должна быть не ниже $2.5 \cdot 10^{-7}$. Покажем, с какой точностью необходимо вычислять геодезические широты и долготы, чтобы они соответствовали точности азимутов и расстояний. Для этого в первых двух уравнениях системы (4.39) от дифференциалов перейдем к средним квадратическим ошибкам и запишем их в виде

$$m_B \leq \rho'' \frac{\cos A}{M} s \frac{m_s}{s}; m_L \leq \rho'' \frac{\sin A}{N \cos B} s \frac{m_s}{s}.$$

Примем условие, чтобы азимут в равной мере влиял на точность вычислений. Это будет при условии, когда $A=45^\circ$. Длины сторон триангуляции 1 класса не менее 20 км. В результате получаем для близэкваториальных и средних широт $m_B \approx m_L \leq 0.0002'' \approx 10^{-9}$. При этом требования к точности долготы снижаются по мере удаления от экватора. Подобные расчеты можно произвести и иным образом. Ошибка во взаимном положении двух смежных пунктов, связанных геодезическими измерениями, определяется поперечным сдвигом, обусловленным ошибкой передачи азимутов, и продольным сдвигом, обусловленным ошибками линейных измерений. Естественно, при построении геодезических сетей любыми методами должно выдерживаться условие равнозначного влияния ошибок угловых и линейных величин на точность. Общеизвестны формулы, определяющие поперечный и продольный сдвиги двух смежных пунктов

$$m_{\text{прод.}} = m_s; m_{\text{попер.}} = \frac{m_\beta}{\rho} s$$

Отсюда следует условие построения сетей любого класса $\frac{m_s}{s} = \frac{m_\beta}{\rho}$ при $m_{\text{прод.}} = m_{\text{попер.}}$. Для 1 класса мы имеем при ранее принятых условиях

$$m_{\text{полож.}} = s \sqrt{\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 + \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2} \approx 0.01m$$

Ошибки в значениях широты и долготы точки определяют ошибки ее положения на меридиане и параллели соответственно, а в совокупности – ошибку положения точки на координатной поверхности.

$$m_{\text{мер.}} = \frac{m_B}{\rho} M; m_{\text{нар.}} = \frac{m_L}{\rho} N \cos B$$

Отсюда следует, что вычислять широты и долготы необходимо с той же точностью, что определено и другим путем.

Таким образом получаем, что геодезические широты и долготы на пунктах 1 класса вычисляются с округлением до $0.0001''$, а геодезические азимуты принято вычислять с округлением до $0.001''$. В каталогах после уравнивания геодезической сети значения широт и долгот помещаются с округлением до $0.001''$, азимутов – до $0.01''$.

6.3. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды с начальными аргументами

Из уравнений (6.1) видно, что геодезические широта, долгота и азимут определяемой точки на поверхности эллипсоида являются некоторыми, пока неопределенными функциями от расстояния между определяемой и исходной точками. Это можем записать в виде

$$B_2 = f_1(s); L_2 = f_2(s); A_{21} = f_3(s). \quad (6.2)$$

При условии, что эти функции дифференцируемы и допускают разложение в ряд Тейлора по степеням малой величины s , запишем

$$\begin{aligned} B_2 &= f_1(0) + f_1'(0)s + f_1''(0)\frac{s^2}{2} + f_1'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_1^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \\ L_2 &= f_2(0) + f_2'(0)s + f_2''(0)\frac{s^2}{2} + f_2'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_2^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \\ A_{21} &= f_3(0) + f_3'(0)s + f_3''(0)\frac{s^2}{2} + f_3'''(0)\frac{s^3}{6} + \dots + f_3^n(0)\frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

При условии, когда $s = 0$, очевидно будем иметь $B_1=f_1(0)$; $L_1=f_2(0)$; $B_1=f_3(0)$ и уравнения (6. 3) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
 b &= B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3B}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^n B}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots \\
 l &= L_2 - L_1 = \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3L}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^n L}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots \\
 a &= A_{21} - A_{12} \pm \pi = \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 s + \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3A}{ds^3}\right)_1 \frac{s^3}{6} + \dots + \left(\frac{d^n A}{ds^n}\right)_1 \frac{s^n}{n!} + \dots
 \end{aligned} \tag{ 6. 4 }$$

В уравнениях (6. 4), в отличие от уравнений (6. 3), вид функций, связывающих координаты двух точек определен, а именно, выражения для первых производных нам известны из (4. 39), которые мы запишем с учетом принятых обозначений

$$\left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \frac{\cos A_{12}}{c} V_1^3; \left(\frac{dL}{ds}\right)_1 = \frac{\sin A_{12}}{c \cos B_1} V_1; \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 = \frac{\cos A_{12}}{c} V_1 \operatorname{tg} B_1. \tag{ 6. 5 }$$

Вычисление последующих производных не вызывает труда, когда вторая производная равна производной от первой и т. д. Здесь применяем правила дифференцирования сложных функций, неявно зависящих от переменной s .

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2B}{ds^2}\right)_1 &= \frac{d}{ds} \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{V^3 \cos A}{c}\right)_1 = \frac{V_1^3}{c} \frac{\partial}{\partial A} (\cos A)_1 \left(\frac{dA}{ds}\right)_1 + \frac{\cos A_{12}}{c} \frac{\partial}{\partial B} (V^3)_1 \left(\frac{dB}{ds}\right)_1 = \\
 &= -\frac{V_1^4 \sin^2 A_{12}}{c^2} \operatorname{tg} B_1 - 3e^{1/2} \frac{\cos^2 A_{12}}{c^2} V_1^4 \sin B_1 \cos B_1 = \\
 &= -\left(\frac{\operatorname{tg} B_1}{R_1^2}\right) (\sin^2 A_{12} + 3e^{1/2} \cos^2 A_{12} \cos^2 B_1)
 \end{aligned} \tag{ 6. 6 }$$

Действуя аналогично и опуская промежуточные действия, получаем для вторых производных от $f_2(s)$ и $f_3(s)$ следующие выражения.

$$\left(\frac{d^2L}{ds^2}\right)_1 = 2 \frac{\operatorname{tg} B_1 \sin A_{12}}{N_1^2 \cos B} \cos A_{12}; \left(\frac{d^2A}{ds^2}\right)_1 = \frac{\sin A_{12} \cos A_{12}}{N_1^2} (V_1^2 + 2 \operatorname{tg}^2 B_1). \tag{ 6. 7 }$$

Возникает вопрос, сколько членов разложения следует брать в (6. 4) для обеспечения необходимой точности вычислений широт, долгот и азимутов. Заметим из (6. 5) – (6. 7), что с возрастанием порядка численные значения производных уменьшаются. При этом будут уменьшаться и численные значения членов разложений (6. 4) не хуже, чем $(s/R)^n$, где n – его порядковый номер и при рассто-

ниях $s \leq 30$ км будем иметь малые величины первого, второго, третьего и т. д. порядка:

$$(s/R)^1 \leq 5 \cdot 10^{-3}; (s/R)^2 \leq 2 \cdot 10^{-5}; (s/R)^3 \leq 10^{-7}; (s/R)^4 \leq 5 \cdot 10^{-10} \text{ и т. Д.}$$

Таким образом видим, что достаточно удерживать три члена разложения, при этом точность вычислений, оцененная с помощью остаточного члена разложений в форме Лагранжа меньше требуемой точности вычислений широт, долгот и азимутов. Здесь говорят, что для решения задачи на малые расстояния достаточно удерживать малые величины третьего порядка.

Третьи производные в (6. 4) получают как производные от вторых, выражения которых приведем без вывода, опуская слагаемые, содержащие множителями e^2 , значение которых меньше требуемой точности вычислений (имея в виду, что $e^2 \approx 7 \cdot 10^{-3}$ – малая величина первого порядка).

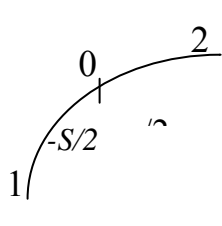
$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_1 &= -\frac{\cos A_{12}}{N_1^3} \sin^2 A_{12} (1 + 3tg^2 B_1) \\ \left(\frac{d^3 L}{ds^3} \right)_1 &= \frac{2 \sin A_{12}}{N_1^3 \cos B_1} (\cos^2 A_{12} (1 + 4tg^2 B_1) - tg^2 B_1) \\ \left(\frac{d^3 A}{ds^3} \right)_1 &= -\frac{\sin A_{12}}{N_1^3} tg B_1 (\cos^2 A_{12} (5 + 6tg^2 B) - \sin^2 A_{12} (1 - 2tg^2 B)) \end{aligned} \tag{ 6. 8 }$$

Подставляя полученные выражения производных в (6. 4), получим рабочие формулы для вычислений, наиболее удобные для решения прямой геодезической задачи на расстояния до 30 км. В формулах значения производных (коэффициентов разложений) вычисляются по координатам начальной точки, отсюда название формул.

6. 4. Разложение разностей широт, долгот и азимутов в ряды со средними аргументами

Как отмечено, формулы для решения главной геодезической задачи, основанные на рядах с начальными аргументами, имеют ограниченные возможности. Рассмотрим один из возможных путей их усовершенствования, основанный на применении рядов со средними аргументами. При этом мы также будем удерживать в формулах для вычислений малые величины третьего порядка.

Пусть мы имеем некоторую геодезическую линию s_{12} (рис. 6. 2), в середине которой имеем точку O с координатами B_0 и L_0 , геодезические расстояния от которой до точек 1 и 2 будут соответственно $-s/2$ и $s/2$. Действуя аналогично тому, как это делали ранее, запишем следующие разложения для широты:



$$\begin{aligned} B_2 - B_0 &= \left(\frac{dB}{ds} \right)_0 \frac{s}{2} + \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{48} + \dots \\ B_1 - B_0 &= -\left(\frac{dB}{ds} \right)_0 \frac{s}{2} + \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} - \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{48} + \dots \end{aligned} \tag{ 6. 9 }$$

Рис. 6. 2

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$B_2 - B_1 = b = \left(\frac{dB}{ds} \right)_0 s + \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots, \quad (6.10)$$

которое выражает разность широт как и первое уравнение (6. 4).

Аналогично получаем для разностей долгот и азимутов

$$L_2 - L_1 = l = \left(\frac{dL}{ds} \right)_0 s + \left(\frac{d^3 L}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots$$

$$A_{21} - A_{12} \pm \pi = a = \left(\frac{dA}{ds} \right)_0 s + \left(\frac{d^3 A}{ds^3} \right)_0 \frac{s^3}{24} + \dots \quad (6.11)$$

Отличие выражений (6. 10) – (6. 11) от (6. 4) состоит в том, что они содержат меньшее число слагаемых и проще для вычислений, но значения производных здесь следует вычислять по широте и азимуту середины линии. Возникает вопрос, быть может эти значения равны средним значениям, получаемым по формулам

$$B_m = (B_1 + B_2) / 2 \text{ и } A_m = (A_{12} + A_{21} \pm \pi) / 2.$$

Проверим, так ли это, для чего возьмем полусуммы уравнений (6. 9) и аналогичных им уравнений для долгот и азимутов, в результате получим

$$B_m - B_0 = \left(\frac{d^2 B}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots; L_m - L_0 = \left(\frac{d^2 L}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots; A_m - A_0 = \left(\frac{d^2 A}{ds^2} \right)_0 \frac{s^2}{8} + \dots; \quad (6.12)$$

Отсюда видно, что средние координаты отличаются от координат середины геодезической линии на малые величины второго порядка. При этом на данной геодезической линии существуют четыре различные точки со средними координатами. Это обстоятельство следует учитывать при дальнейшем выводе рабочих формул.

В формулах (6. 10) – (6. 11) коэффициенты разложений представлены производными, являющимися функциями широты и азимута середины геодезической линии, значения которых неизвестны. Мы можем вычислить средние широту и азимут, если известны их значения в двух точках. Поэтому перейдем в коэффициентах указанных формул к средним широтам и азимутам (средним аргументам). При этом будем иметь в виду порядок малых величин (6. 12). Для широт имеем

$$\left(\frac{dB}{ds} \right)_0 = \left(\frac{dB}{ds} \right)_m + \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{ds} \right)_m (B_0 - B_m) + \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{dB}{ds} \right)_m (A_0 - A_m) + \dots \quad (6.13)$$

$$\left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_0 = \left(\frac{d^3 B}{ds^3} \right)_m \quad (6.14)$$

Учитывая значения разностей из (6. 12), выражения для производных, полученные ранее (6. 5) – (6. 8), а также вычисляя частные производные

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{dB}{ds} \right)_m = -\frac{\sin A_m}{M_m}; \quad \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{ds} \right)_m = -\frac{3e'^2 \cos A_m \cos B_m \sin B_m}{N_m}, \quad (6.15)$$

получаем для (6. 10) выражение в виде

$$b = \frac{s \cos A_m}{M_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12N_m^2} + \frac{s^2 \operatorname{tg}^2 B_m \sin^2 A_m}{8N_m^2} \right) \quad (6.16)$$

Действуя аналогично, получаем для разностей долгот и азимутов

$$l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24N_m^2} - \frac{s^2 \cos^2 A_m}{24N_m^2} \right)$$

$$a = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \left(1 + \frac{s^2 \sin^2 A_m}{12N_m^2} + \frac{s^2 \cos^2 A_m}{12M_m^2} - \frac{s^2 \sin^2 A_m \operatorname{tg}^2 B_m}{24N_m^2} \right) \quad (6.17)$$

Заметим, что в правых частях полученных уравнений (6. 16) – (6. 17) дробные выражения, стоящие в скобках, являются малыми величинами третьего порядка, их можно для удобства вычислений с принятой точностью принять равными главным членам разложений и тогда можем записать

$$b = \frac{s \cos A_m}{M_m} \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{24} \right);$$

$$l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left(1 - \frac{b^2}{24} + \frac{a^2}{24} \right); \quad (6.18)$$

$$a = \frac{s \sin A_m \operatorname{tg} B_m}{N_m} \left(1 + \frac{b^2}{12} + \frac{(2 - \sin^2 B_m)}{24} l^2 \right)$$

Здесь вычисления ведутся в радианной мере, а в последнем уравнении, в поправочном члене принято

$$a = l \sin B_m. \quad (6.19)$$

6. 5. Порядок решения прямой геодезической задачи по формулам со средними аргументами

При решении прямой геодезической задачи известны следующие величины: B_1, L_1, S_{12}, A_{12} , требуется найти: B_2, L_2, A_{21} . При этом очевидны уравнения:

$$B_2 = B_1 + b; \quad L_2 = L_1 + l; \quad A_{21} = A_{12} + a \pm \pi. \quad (6.20)$$

При вычислении обратного азимута знак плюс берется, когда прямой азимут меньше π и знак минус – когда он больше π .

Особенностями применения формул (6. 18) при вычислениях искомым разностей является то, что нам неизвестны средние значения широт и азимутов, поэтому задача решается методом последовательных приближений. На первом этапе принимают $(A_m)_{(1)} = A_{12}$; $(B_m)_{(1)} = B_1$, а значения разностей, стоящих в скобках уравнений (6. 18), равными нулю. Получают первоначальные значения разностей из этих уравнений $b_{(1)}$, $l_{(1)}$, $a_{(1)}$, с учетом которых получают значения средних широт и долгот по формулам:

$$(B_m)_{(1)} = B_1 + b_{(1)}/2; \quad A_m = A_{12} + a_{(1)}/2.$$

Для расстояний до 30 км второе приближение дает искомые разности с достаточной точностью, для контроля выполняют третье приближение. Получив значения разностей, искомые величины находят по формулам (6. 19)

6. 6. Порядок решения обратной геодезической задачи

Здесь известными величинами являются: B_1, B_2, L_1, L_2 , требуется определить: s_{12}, A_{12}, A_{21} . Среднюю широту определяем по формуле $B_m = (B_1 + B_2)/2$ и разности широт и долгот $b = B_2 - B_1$; $l = L_2 - L_1$.

Далее замечаем, что в (6. 18) первые два уравнения можно записать с учетом (6. 19) в виде

$$b = \frac{s \cos A_m}{M_m} \left(1 + \frac{l^2}{12} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); \quad l = \frac{s \sin A_m}{N_m \cos B_m} \left(1 - \frac{b^2}{24} + \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right). \quad (6. 21)$$

Разделив второе уравнение на первое и ограничиваясь принятой точностью, получим после несложных преобразований уравнение для вычисления среднего азимута

$$\operatorname{tg} A_m = \frac{l \cos B_m}{b} \frac{N_m}{M_m} \left(1 + \frac{b^2}{24} + \frac{l^2}{12} \right)$$

Из любого из уравнений (6. 21) выражаем расстояние s и вычисляем его с контролем по формулам

$$s = \frac{b M_m}{\cos A_m} \left(1 - \frac{l^2}{12} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right); \quad s = \frac{l N_m \cos B_m}{\sin A_m} \left(1 + \frac{b^2}{24} - \frac{l^2 \sin^2 B_m}{24} \right)$$

Для вычисления разности азимутов используем третье уравнение (6. 18), затем вычисляем искомые прямой и обратный азимуты по формулам

$$A_{12} = A_m - a/2; \quad A_{21} = A_m + a/2 \pm \pi$$

6. 7. Способ Бесселя для решения главной геодезической задачи

Рассмотренный способ решения главной геодезической задачи пригоден для малых расстояний, мы привели формулы, обеспечивающие необходимую точность при расстояниях до 30 км.

Немецкий геодезист и астроном Ф. Бессель обратил внимание на то, что теорема Клеро для геодезической линии земного эллипсоида является аналогом теоремы синусов сферической тригонометрии для полярного сферического треугольника. Если в системе дифференциальных уравнений для геодезической линии земного эллипсоида (4. 40)

$$\frac{du}{dS} = \frac{V}{a} \cos A; \frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{a \cos u}; \frac{dA}{dS} = \frac{V}{a} \operatorname{tg} u \sin A \quad (6. 22)$$

положить эксцентриситет, равный нулю, получим на сфере единичного радиуса

$$\frac{d\varphi}{d\sigma} = \cos \alpha; \frac{d\lambda}{d\sigma} = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi}; \frac{d\alpha}{d\sigma} = \operatorname{tg} \varphi \sin \alpha \quad (6. 23)$$

Здесь α , φ , λ , σ – сферические: азимут, широта, долгота и расстояние.

Ф. Бессель рассмотрел полярные треугольники на сфере и эллипсоиде при условии, чтобы аргументы теоремы Клеро (азимуты и широты) были бы равны. Тогда, разделив соответствующие уравнения (6. 22) и (6. 23) получим, при условии

$$\alpha = A; \varphi = u \quad (6. 24)$$

следующие дифференциальные уравнения

$$ds = \frac{a}{V} d\sigma = a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma; dL = \frac{d\lambda}{V} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda \quad (6. 25)$$

Интегрируя эти уравнения, получим для расстояний и долгот на эллипсоиде

$$s = a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\sigma; L_2 - L_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} d\lambda \quad (6. 26)$$

Полученные уравнения вместе с (6. 24) определяют зависимости всех элементов соответствующего сфероидического и сферического полярных треугольников по Бесселю. Это позволяет применить формулы сферической тригонометрии для установления связи между величинами, входящими под знаки интегралов (6. 26).

На рис. 6. 3 имеем геодезическую линию, проходящую через некоторые две точки 1 и 2, пересекающую экватор в точке 0. Геодезические азимуты соответственно равны в этих точках: A_1 , $2\pi - A_2$ и A_0 и широты: u_1 , u_2 , $u_0 = 0$. По

условию Бесселя эти сфероидические величины сохраняются на сфере единичного радиуса, где длины больших кругов выражены в радианной мере и их значения показаны на рисунке. Точка P – полюс, а дуги PO , $P1$, $P2$ – меридианы соответствующих точек.

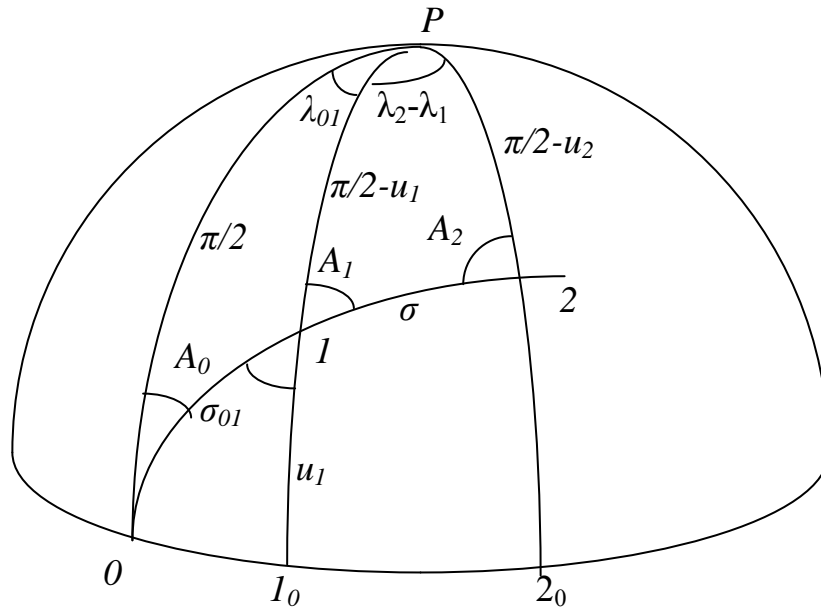


Рис. 6. 3

Для дальнейших выводов введем условные долготы λ_0 и сферические расстояния σ_0 , отсчитанные от экваториальной точки геодезической линии до текущей. При вычислении определенных интегралов (6. 26) участвуют их разности, поэтому искомые величины – расстояние и разность долгот получают как разности

$$\sigma = \sigma_{02} - \sigma_{01} ; \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$$

Применяя аналогии Непера к прямоугольному сферическому треугольнику $O1I_0$, запишем

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2 - A_0) &= \text{ctg} \sigma_0 \text{ctg}(\pi/2 - \lambda_0); \longrightarrow \sin A_0 = \text{ctg} \sigma_0 \text{tg} \lambda_0 \\ \cos \sigma_0 &= \sin(\pi/2 - u) \sin(\pi/2 - \lambda_0) \longrightarrow \cos \sigma_0 = \cos u \cos \lambda_0 \\ \cos(\pi/2 - u) &= \sin \sigma_0 \sin(\pi/2 - A_0) \longrightarrow \sin u = \sin \sigma_0 \cos A_0 \end{aligned} \quad (6. 27)$$

Дифференцируя первое из уравнений (6. 27) по переменным величинам (азимут A_0 – величина постоянная для данной геодезической линии), получаем

$$\frac{\cos^2 \sigma_0}{\cos^2 \lambda_0} d\lambda_0 = \sin A_0 d\sigma_0 \quad (6. 28)$$

Тогда, с учетом второго и третьего уравнений (6. 27) можем записать

$$\cos^2 u d\lambda_0 = \sin A_0 d\sigma_0 ; \cos^2 u = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0 \quad (6. 29)$$

Разложим подынтегральные выражения (6. 26) в биномиальный ряд по степеням малых величин $e^2 \cos^2 u$ ($e'^2 \sin^2 u$) $\leq 7 \cdot 10^{-3}$

$$\left(1 - e^2 \cos^2 u\right)^{1/2} = 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \frac{e^6}{16} \cos^6 u - \frac{5e^8}{132} \cos^8 u - \dots \quad (6.30)$$

$$\left(1 + e'^2 \sin^2 u\right)^{1/2} = 1 + \frac{e'^2}{2} \sin^2 u - \frac{e'^4}{8} \sin^4 u + \frac{e'^6}{16} \sin^6 u - \frac{5e'^8}{132} \sin^8 u + \dots$$

При этом заметим порядок величин членов разложений :

$$\frac{e^2}{2} \cos^2 u \leq 3,5 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{e^4}{8} \cos^4 u \leq 6 \cdot 10^{-6}; \quad \frac{e^6}{16} \cos^6 u \leq 2,1 \cdot 10^{-8}; \quad \frac{5e^8}{132} \cos^8 u \leq 7 \cdot 10^{-11}$$

Следовательно, для обеспечения необходимой точности вычислений достаточно удерживать три члена разложения. Можно заметить то, что здесь степени разложения характеризуют малые величины определенного порядка, как и в способе со средними аргументами, но преимущество данных формул в том, что величины членов разложения (6. 30) практически не зависят от расстояния.

С учетом изложенного запишем интегральные выражения (6. 26) в виде

$$\begin{aligned} s &= b \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left(1 + \frac{e'^2}{2} \sin^2 u - \frac{e'^4}{8} \sin^4 u + \frac{e'^6}{16} \sin^6 u - \dots \right) d\sigma_0 = \\ &= b\sigma + b \frac{e'^2}{2} \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left(\sin^2 u - \frac{e'^2}{4} \sin^2 u + \frac{e'^4}{8} \sin^4 u + \dots \right) d\sigma_0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$L_2 - L_1 = l = \int_{\lambda_{01}}^{\lambda_{02}} \left(1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 u - \frac{e^4}{8} \cos^4 u - \frac{e^6}{16} \cos^6 u - \dots \right) d\lambda_0 \quad (6.32)$$

С учетом третьего уравнения (6. 27) можем записать для (6. 31), введя обозначение для постоянной величины $k = e' \cos A_0$

$$s = b\sigma + b \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left(\frac{k^2}{2} \sin^2 \sigma_0 - \frac{k^4}{8} \sin^4 \sigma_0 + \frac{k^6}{16} \sin^6 \sigma_0 \right) d\sigma_0 \quad (6.33)$$

Интеграл долготы (6. 32) с учетом уравнений (6. 29) запишем в виде

$$l = \omega - \frac{e^2}{2} \int_{\sigma_{01}}^{\sigma_{02}} \left(1 + \frac{e^2}{4} (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0) + \frac{e^4}{8} (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma_0)^2 + \dots \right) \sin A_0 d\sigma_0 \quad (6.34)$$

где принято $\omega = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{02} - \lambda_{01}$ – разность сферических долгот.

Производя почленное интегрирование (6. 33) и (6. 34), получаем после тождественных преобразований с принятой точностью:

для расстояния

$$s = A\sigma + \sin 2\sigma_{01}(B + C \cos 2\sigma_{01}) - \sin 2\sigma_{02}(B + C \cos 2\sigma_{02}), \quad (6.35)$$

где приняты обозначения постоянных коэффициентов:

$$A = b\left(1 + \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} + \frac{5k^6}{256} - \dots\right); \quad B = b\left(\frac{k^2}{8} - \frac{k^4}{32} + \frac{15k^6}{1024} - \dots\right); \quad C = b\left(\frac{k^4}{128} - \frac{3k^6}{512} + \dots\right) \quad (6.36)$$

и для разности геодезических долгот

$$l = \omega - \sin A_0 (A_1 \sigma + B_1 (\sin 2\sigma_{02} - \sin 2\sigma_{01})) \quad , \quad (6.37)$$

где приняты обозначения постоянных коэффициентов:

$$A_1 = \frac{e^2}{2} \left(1 + \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8} + \dots\right) - \frac{e^4}{16} \cos^2 A_0 (1 + e^2 + \dots) + \frac{3e^6}{128} \cos^4 A_0 (1 + \dots);$$

$$B_1 = \frac{e^4}{32} \cos^2 A_0 (1 + e^2 + \dots) - \frac{e^6}{64} \cos^4 A_0 (1 + \dots) \quad (6.38)$$

Таким образом получены основные формулы для решения главной геодезической задачи на большие расстояния. При вычислениях на ЭВМ можно заметить, что их объем здесь несущественно отличается от вычислений по формулам со средними аргументами. Поэтому в современных условиях лучше применять способ Бесселя для решения задачи на любые расстояния.

6. 8. О современных требованиях к решению главной геодезической задачи

Как уже отмечалось ранее, современные стандарты геодезических измерений, основанные прежде всего на спутниковых системах позиционирования ГЛОНАСС (РФ) и GPS-NAVSTAR (США) могут обеспечивать точность определения абсолютных координат точек земной поверхности и околоземного пространства практически на порядок выше, чем классические астрономические определения. Так, если положение астрономических пунктов Лапласа, на которые опираются первоклассные звенья триангуляции 1 класса, характеризуются ошибками 10 и более метров, то современные системы позволяют обеспечивать точность до 1 м. Существенную роль в повышении качества всех видов геодезических измерений играют компьютерные технологии автоматизации измерений и их математической обработки. По материалам уравнивания астрономо – геодезической сети 1 – 2 классов на всей территории бывшего Советского Союза получены ошибки взаимного положения смежных пунктов порядка 5 – 7 см, а спутниковыми системами обеспечивается взаимное положение пунктов на расстояниях до 20 км с ошибками порядка 7 – 10 мм. Следует отметить при этом, что спутниковые системы находятся в стадии совершенствования и позволяют определять с высокой точностью взаимное положение пунктов на большие расстояния.

Таким образом, можно говорить о том, что конец XX и начало XXI века являются эпохой революционных изменений в повышении качества топографо – гео-

дезической и картографической продукции, их представления и практического применения.

К настоящему времени разработаны различные методы решения главной геодезической задачи на любые расстояния, основанные как на совершенствовании способа Бесселя, так и альтернативные ему. Естественно, в современных условиях задача должна решаться достаточно надежно и с достаточной точностью на любые расстояния (от 20 до 20 000 км), удовлетворяющей высокой точности измерений.

Рассмотрим порядок решения прямой и обратной задач на любые расстояния на примере способа Бесселя. Для этого используем приведенные нами формулы и обозначения, принятые на рисунке 6. 3.

Прямая геодезическая задача:

7. Вычисление приведенной широты исходной точки l

$$tgu_1 = \sqrt{1 - e^2} tgB_1$$

8. Вычисление вспомогательных величин из решения прямоугольного сферического треугольника $01l_0$

$$tg\sigma_{01} = \frac{tgu_1}{\cos A_1}; \quad tgA_0 = \cos\sigma_{01} tgA_1$$

9. Вычисление σ из формулы (6. 35) и $\sigma_{02} = \sigma_{01} + \sigma$ методом последовательных приближений (не более трех)
10. Решение прямоугольных сферических треугольников $01l_0$ и 022_0

$$tgA_2 = \frac{tgA_0}{\cos\sigma_{02}}; \quad tgB_2 = \frac{tgu_2}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{tg\sigma_{02} \cos A_2}{\sqrt{1 - e^2}};$$

$$tg\lambda_{01} = \sin A_0 tg\sigma_{01}; \quad tg\lambda_{02} = \sin A_0 tg\sigma_{02}$$

$$\omega = \lambda_{02} - \lambda_{01}$$

11. Определение геодезической долготы $L_2 = L_1 + l$, где l определяется по формуле (6. 37).

Обратная геодезическая задача:

1. Вычисление приведенных широт точек l и 2

$$tgu_1 = \sqrt{1 - e^2} tgB_1; \quad tgu_2 = \sqrt{1 - e^2} tgB_2$$

2. Совместное применение формул, следующих из (6. 37)

$$\omega = l + \sin A_0 (A_1 \sigma + B_1 (\sin 2\sigma_{02} - \sin 2\sigma_{01})),$$

решения полярного сферического треугольника $P12$ и теоремы Клеро

$$\cos \sigma = \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \cos \omega ;$$

$$\sin A_0 = \cos u_1 \sin A_1 = \cos u_1 \cos u_2 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma} \quad ; \quad \sin \sigma_{01} = \frac{\sin u_1}{\cos A_0}$$

для вычисления ω , σ , σ_{01} и A_0 последовательными приближениями (не более трех)

3. Вычисление азимутов из треугольника $P12$

$$\sin A_1 = \cos u_2 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma} \quad ; \quad \sin A_2 = \cos u_1 \frac{\sin \omega}{\sin \sigma}$$

4. Вычисление расстояния S по формуле (6. 35)

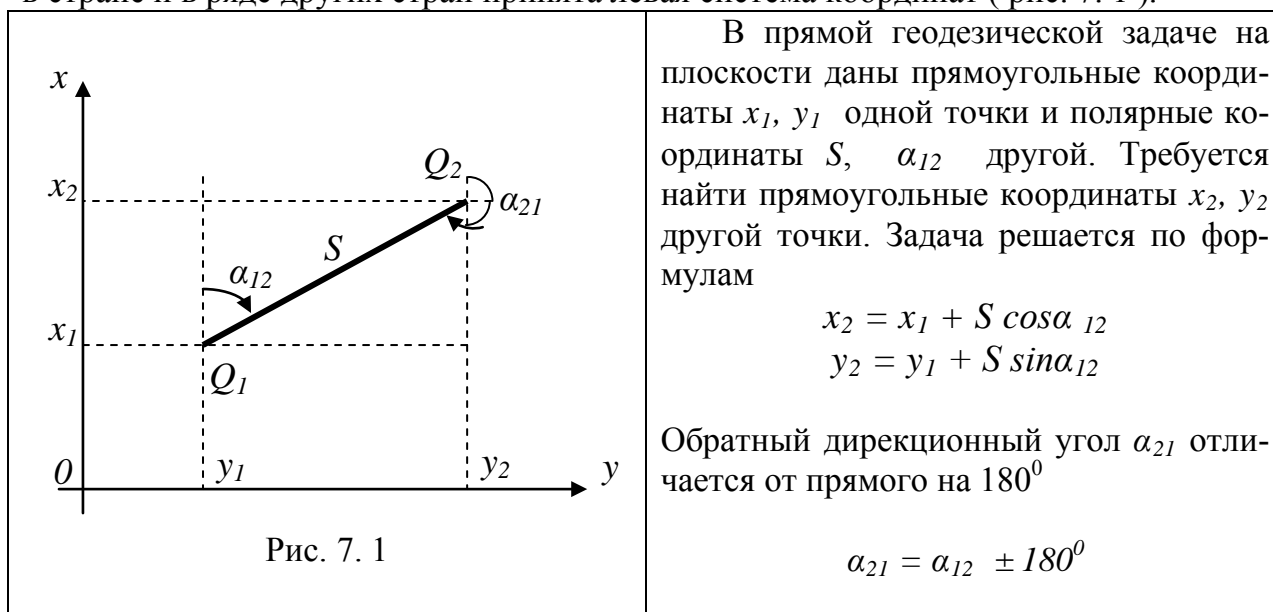
Отметим, что приведенные формулы удобны для составления алгоритма и программы вычислений на ЭВМ при решении задачи на любые расстояния. Вообще говоря, на поверхности эллипсоида, как и на любой замкнутой поверхности, между двумя точками можно провести не одну, а две геодезические линии. При решении геодезических задач под расстоянием понимают длину кратчайшей из этих кривых.

7. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

7.1. Применение плоских координат в геодезии

Мы рассмотрели решение геодезических задач на поверхности земного эллипсоида при различных расстояниях между точками. Отметим, что в большинстве случаев геодезической практики измерения производятся между точками, удаленными друг от друга на незначительные расстояния. Более того, геодезические построения, создаваемые в качестве обоснования для крупномасштабных топографических съемок инженерных объектов, населенных пунктов и др., как правило, располагаются на ограниченных по площади территориях. В этих случаях более удобной и простой является система координат на плоскости.

В системе плоских координат решение всех задач производится значительно проще – по формулам плоской тригонометрии. В геодезии, как известно, применяются две системы плоских координат: **декартовые прямоугольные** – x , y и **полярные** – расстояние S и дирекционный угол α . Со времен Гаусса в геодезии у нас в стране и в ряде других стран принята левая система координат (рис. 7.1).



В обратной задаче по известным прямоугольным координатам x_1, y_1, x_2, y_2 , двух точек требуется найти полярные координаты. Задача решается по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Видно, что указанные формулы существенно проще формул, которые мы рассмотрели для решения аналогичных задач на поверхности эллипсоида даже при малых расстояниях. Поэтому при решении многих задач в геодезии применяют систему плоских координат, а поверхность эллипсоида заменяют плоскостью.

Поверхность эллипсоида неизометрична плоскости, т. е. не может быть развернута на ней без деформаций и разрывов. Поэтому в геодезии, как и в картографии применяют различные законы взаимного отображения (проекции) поверхности эллипсоида на плоскости. В **математической картографии** подробно рассматриваются различные виды проекций, учет искажений геометрических элемен-

тов эллипсоида при их отображении на плоскости с целью создания самых различных карт от наиболее точных – топографических, до обзорных – географических (**картографические проекции**).

Анализ проекций для решения геодезических задач на плоскости (**геодезических проекций**), получивших наибольшее применение в мировой геодезической практике, показывает следующее:

во – первых, геодезические проекции получают на основе теории **конформного (равноугольного) отображения** поверхностей, когда частный масштаб длин в точке не зависит от направления и сохраняется подобие бесконечно малых фигур;

во – вторых, геодезические построения на отдельных объектах и в отдельных государствах, как правило, охватывают небольшие по сравнению с площадью Земли территории;

в – третьих, все геодезические проекции относятся к весьма узкому классу **перспективных и симметричных проекций**, когда все виды искажений возрастают по мере удаления от линии или точки симметрии;

в – четвертых, в геодезических проекциях, по крайней мере, один из меридианов эллипсоида на плоскости изображается прямой линией и принимается за одну из координатных осей, в левой системе – за ось абсцисс и называется **осевым меридианом**.

У нас в стране, других странах Европы и бывшего Советского Союза до последнего времени наиболее широкое применение для создания топографических карт и для обработки геодезических измерений нашла **проекция Гаусса – Крюгера**. Вообще говоря, во всех странах, как правило, для этих целей применяется одна и та же проекция (одна система плоских координат), что обеспечивает удобства совместного применения топографических карт, каталогов координат геодезических пунктов и результатов геодезических измерений при инженерно – геодезическом обеспечении проектирования, строительства и эксплуатации самых различных объектов.

Заметим, что К. Гаусс в 1825 году применил конформную проекцию для математической обработки результатов градусных измерений, выполненных вдоль Ганноверского меридиана. Удобство этой проекции заключалось в том, что искажения всех измеренных величин в ряде триангуляции, вытянутом вдоль меридиана, при отображении на плоскость были пренебрегаемо малы. Вычислив плоские координаты исходных пунктов по геодезическим, уравнивание ряда и все вычисления в нем производили на плоскости. Основные формулы для вычислений и результаты геодезических работ Гаусса впервые были опубликованы известным немецким геодезистом О. Шрейбером в 1866 году. В 1917 году в Германии и Австрии проекция Гаусса с трехградусными координатными зонами рекомендована для кадастровых работ. И лишь в 1919 году немецкий геодезист Л. Крюгер предложил проекцию Гаусса с шестиградусными зонами для создания топографических карт и математической обработки геодезических измерений, для чего были составлены специальные таблицы, существенно облегчающие вычисления. В результате проекция стала находить все большее применение в различных странах как проекция Гаусса – Крюгера. В СССР проекция Гаусса – Крюгера впервые применялась с 1928 года для обработки Донбасской триангуляции известным советским геодезистом и маркшейдером Н. Г. Келлем.

Повсеместное применение в СССР проекция Гаусса – Крюгера нашла после введения системы геодезических координат 1942 года на поверхности референц – эллипсоида Красовского (до этого применялся эллипсоид Бесселя). Были разработаны специальные таблицы как для логорифмических, так и нелогорифмических

вычислений, для широт территории СССР. В разработку таблиц наибольший вклад внесли известные советские ученые – геодезисты Ф. Н. Красовский, А. А. Изотов, А. М. Вировец, Д. А. Ларин, Б. Н. Рабинович.

7. 2. Общие сведения из теории конформного отображения поверхностей

Под **взаимным отображением** поверхностей понимают взаимно однозначное соответствие их точек, когда одной точке поверхности соответствует одна и только одна точка другой поверхности.

На поверхности эллипсоида, как известно, положение точек определяется геодезическими широтами B и долготами L . На плоскости – декартовыми прямоугольными координатами x, y .

Таким образом, любое взаимное отображение поверхности эллипсоида и плоскости определяется функциями

$$x = f_1(B, L); \quad y = f_2(B, L) \quad (7.1)$$

$$B = \varphi_1(x, y); \quad L = \varphi_2(x, y) \quad (7.2)$$

Для конформных отображений эти функции должны быть **аналитическими (дифференцируемыми) функциями комплексных переменных** и записаны в виде

$$x + iy = f(B + iL) \quad (7.3)$$

$$B + iL = \varphi(x + iy) \quad (7.4)$$

Кроме того, получим аналитическое представление основного свойства конформных проекций, заключающегося в том, что масштаб длин не зависит от направления. На рисунке 7. 2 имеем изображение на плоскости меридиана AB и параллели AC точки A . Угол γ , образованный прямой, параллельной изображению осевого меридиана (оси абсцисс) и меридиана точки A – сближение меридиана в данной точке.

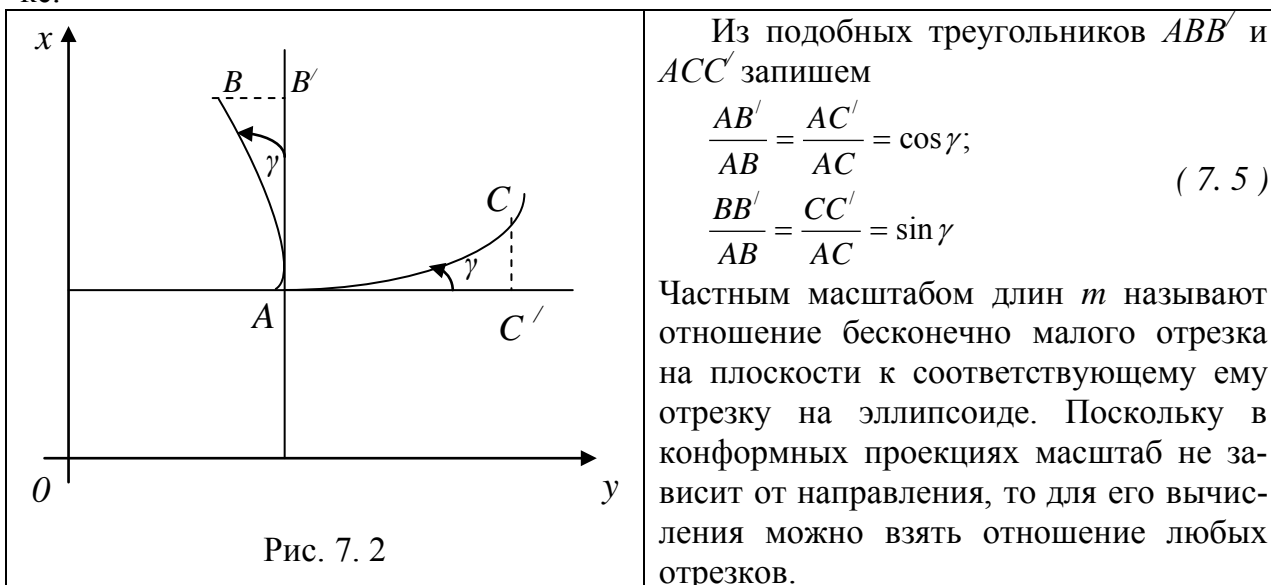


Рис. 7. 2

Возьмем меридиан и параллель эллипсоида и их изображение на плоскости, для которых можем записать

$$m = \frac{AB}{MdB} = \frac{AC}{rdL} \quad (7.6)$$

Полные дифференциалы плоских координат запишем, учитывая (7. 1) или (7. 3), в следующем виде

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial L} dL; \quad dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial L} dL \quad (7.7)$$

где слагаемые в правых частях выражают частные дифференциалы и характеризуют изменения плоских координат при изменении только широты или только долготы на эллипсоиде. Это будет иметь место при движении точки по меридиану или параллели, следовательно, можем записать, согласно рис. 7. 2, формулы (7. 5), учитывая (7. 6), в виде

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial y}{\partial L} dL}{mrdL} = \cos \gamma; \quad -\frac{\frac{\partial y}{\partial B} dB}{mMdB} = \frac{\frac{\partial x}{\partial L} dL}{mrdL} = \sin \gamma \quad (7.8)$$

Далее можем записать из (7. 8)

$$\frac{\partial x}{\partial B} = \frac{M}{r} \frac{\partial y}{\partial L}; \quad \frac{\partial y}{\partial B} = -\frac{M}{r} \frac{\partial x}{\partial L} \quad (7.9)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\partial x}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial L}} = -\frac{\frac{\partial B}{\partial x}}{\frac{\partial B}{\partial L}} \quad (7.10)$$

$$m = \frac{1}{M} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial B}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^2} = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L}\right)^2} \quad (7.11)$$

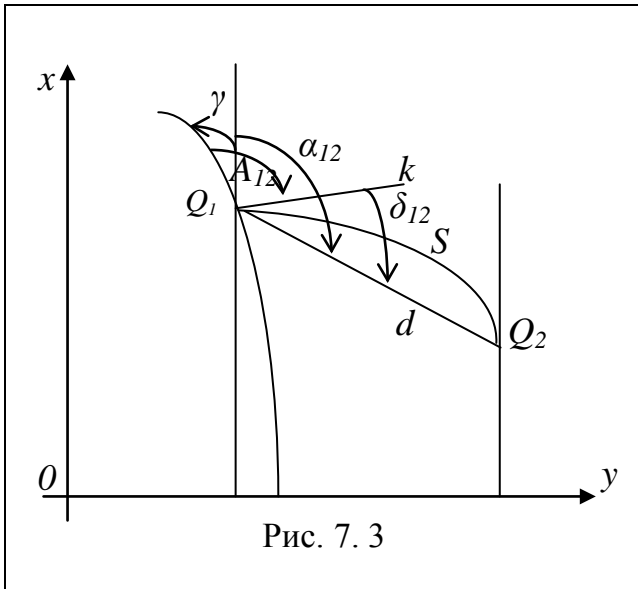
Уравнения в частных производных (7. 10) в теории отображений поверхностей носят название уравнений Коши – Римана для конформных отображений.

Таким образом получены уравнения, в общем виде определяющие конформные проекции эллипсоида на плоскости. Задавая конкретный вид функций (7. 1) – (7. 4), удовлетворяющих (7. 10) получают конкретную проекцию.

Аналогичным образом получают основные формулы для обратного отображения, взяв за основу уравнения (7. 2) и (7. 4).

7. 3. Связь полярных координат на поверхности эллипсоида и плоскости

Уравнения (7. 1) – (7. 4) при соответствующем выборе вида функций осуществляют связь между параметрическими координатами на поверхности эллипсоида и плоскости. Для геодезических проекций необходимо также иметь формулы, связывающие сфероидические и плоские полярные координаты.



На рис. 7.3 показано изображение геодезической линии эллипсоида на плоскости проекции, длиной S и ее хорда d . Показаны также геодезический азимут A_{12} , дирекционный угол α_{12} , поправка за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости проекции. Q_1k – касательная к кривой S в точке Q_1 .

Несложно заметить уравнение связи дирекционного угла и азимута

$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12} \quad (7.12)$$

Формулы для вычисления сближения меридианов γ_1 в точке Q_1 получают из уравнений (7.10). Поправка в направлении за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости δ_{12} получается по формулам дифференциальной геометрии и для малых длин может быть записана в виде

$$\delta_{12} = \Gamma_1 \frac{S}{2} + \left(\frac{d\Gamma}{dS} \right)_1 \frac{S^2}{6} = \dots \quad (7.13)$$

где Γ – кривизна кривой s , определяемая из уравнения Схольца

$$\Gamma = \frac{\partial \ln m}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial y} \cos \alpha \quad (7.14)$$

Связь длины кривой S на плоскости с длиной геодезической линии эллипсоида s выражается интегралом

$$S = \int_{Q_1}^{Q_2} m ds \quad (7.15)$$

Связь длины хорды d с длиной кривой S определяется уравнением дифференциальной геометрии

$$d = S - \Gamma_1^2 \frac{S^2}{24} + \dots \quad (7.16)$$

Таким образом получены основные уравнения конформных геодезических проекций. Конкретный вид проекции, вообще говоря, определяется функциями (7.3) – (7.4), этот процесс может быть весьма трудоемким, но для конформных геодезических проекций можно определить более простой путь их выбора.

7. 4. Характеристические уравнения геодезических проекций

В теории отображения поверхностей указывается на то, что все многообразия конформных отображений следует из аналитической функции комплексных переменных, связывающей изометрические координаты на обеих поверхностях. Под изометрическими координатами на любой поверхности понимают такие, когда равным приращениям координат соответствуют равные линейные приращения вдоль координатных линий. Заметим, что в математике такая система координат называется изотермической, а в картографии и геодезии принято название изометрическая. Таким образом, необходимо установить изометрические координаты на поверхности эллипсоида. Линейный элемент поверхности эллипсоида в функции геодезических координат имеет ранее полученное выражение (4. 6), которое преобразуется к изометрической форме следующим образом

$$ds^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2 = r^2 \left(\left(\frac{M}{r} \right)^2 dB^2 + dL^2 \right) = r^2 (dq^2 + dL^2) \quad (7. 17)$$

Здесь q – изометрическая широта, связанная с геодезической дифференциальным уравнением

$$dq = \frac{M}{r} dB = \frac{(1-e^2)}{W^2 \cos B} dB = \frac{dB}{V^2 \cos B} \quad (7. 18)$$

Интегрирование данного уравнения производим следующим образом

$$\begin{aligned} q &= \int \frac{(1-e^2)dB}{(1-e^2 \sin^2 B)\cos B} = \int \frac{(1-e^2 \sin^2 B - e^2 \cos^2 B)dB}{(1-e^2 \sin^2 B)\cos B} = \int \frac{dB}{\cos B} - e \int \frac{e \cos B dB}{(1-e^2 \sin^2 B)} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin B}{1-\sin B} - \frac{e}{2} \ln \left| \frac{1+e \sin B}{1-e \sin B} \right| = \ln \sqrt{\left(\frac{1+\sin B}{1-\sin B} \right) \left(\frac{1-e \sin B}{1+e \sin B} \right)^e} \end{aligned} \quad (7. 19)$$

Здесь приняли постоянную интегрирования, равной нулю, так как счет широт ведется от экватора.

Система плоских прямоугольных координат изометрическая. Линейный элемент на плоскости выражается уравнением

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \quad (7. 20)$$

Для конформных геодезических проекций запишем уравнения связи изометрических координат в прямом и обратном изображениях

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + iL) \\ q + iL &= \varphi(x + iy) \end{aligned} \quad (7. 21)$$

Учитывая, отмеченное ранее, что в геодезических проекциях решается задача изображения сравнительно малых областей эллипсоида, для каждой из которых можно выбрать некоторые средние значения координат q_0 и L_0 на эллипсоиде, которым на плоскости будут соответствовать значения x_0 , y_0 , уравнения (7. 21) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y) &= f((q_0 + \Delta q) + i(L_0 + l)) \\ (q_0 + \Delta q) + i(L_0 + l) &= \varphi((x_0 + \Delta x) + i(y_0 + \Delta y)) \end{aligned} \quad (7. 22)$$

Здесь L_0 – долгота осевого меридиана и, очевидно, будут иметь место уравнения

$$x_0 + iy_0 = f(q_0 + iL_0); \quad q_0 + iL_0 = \varphi(x_0 + iy_0) . \quad (7. 23)$$

Поскольку функции (7. 22) аналитические, а приращения координат Δq и l , Δx и Δy малые величины, их можно разложить в ряд по формуле Тейлора по степеням малых величин

$$\begin{aligned} \Delta x + i\Delta y &= f(\Delta q + il) = C_1(\Delta q + il) + C_2(\Delta q + il)^2 + C_3(\Delta q + il)^3 + \dots \\ \Delta q + il &= \varphi(\Delta x + i\Delta y) = C'_1(\Delta x + i\Delta y) + C'_2(\Delta x + i\Delta y)^2 + C'_3(\Delta x + i\Delta y)^3 + \dots \end{aligned} \quad (7. 24)$$

Но в геодезических проекциях выполняется условие, что осевой меридиан изображается прямой линией на плоскости, когда выполняются условия

$$l = 0; \quad \Delta y = 0. \quad X_0 = f(q_0); \quad q_0 = \varphi(x_0) \quad (7. 25)$$

и для изображения осевого меридиана на плоскости будут иметь место уравнения

$$\begin{aligned} \Delta X &= f(\Delta q) = C_1\Delta q + C_2\Delta q^2 + C_3\Delta q^3 + \dots \\ \Delta q &= \varphi(\Delta x) = C'_1\Delta x + C'_2\Delta x^2 + C'_3\Delta x^3 + \dots \end{aligned} \quad (7. 26)$$

где коэффициенты C_j – производные вида $\frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j f}{\partial q^j} \right)_0$, а $C'_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial^j \varphi}{\partial x^j} \right)_0$.

Обратимся к первому уравнению из (7. 26). Оно выражает длину изображения осевого меридиана на плоскости от точки с координатами x_0 , y_0 (начальной точки) до текущей точки изображаемой области. При этом заметим, что эта длина выражается в виде разложения по степеням разности изометрической широты текущей и начальной точек, а также коэффициентов разложения, являющимися функциями широты начальной точки. Поэтому формулы (4. 24) и (7. 26) называют формулами, основанными на рядах с начальными аргументами.

Уравнения (7. 26) для различных проекций указанного класса будут отличаться только коэффициентами разложений, которые будут зависеть от вида функций (7. 21), описывающих проекции, поэтому назовем эти уравнения **характеристическими уравнениями геодезических проекций**.

7. 5. Общее алгоритмическое описание геодезических проекций

Здесь мы получим общие формулы для вычислений основных характеристик геодезических проекций.

Произведя возведение в степени выражений, стоящих в правых частях (7. 24), а затем воспользовавшись условием равенства комплексных выражений, когда равны их действительные и мнимые части, получаем следующие выражения для связи координат

$$\Delta x = \sum_{j=1}^n (C_j P_j); \quad \Delta y = \sum_{j=1}^n (C_j Q_j), \quad (7. 27)$$

где $P_j = P_1 P_{(j-1)} - Q_1 Q_{(j-1)}$; $Q_j = P_1 Q_{(j-1)} + Q_1 P_{(j-1)}$ при условии $P_0 = 1$; $Q_0 = 0$. Это гармонические полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа. При этом имеем $P_1 = \Delta q$; $Q_1 = l$.

Вычислим производные, входящие в уравнения Коши – Римана (7. 10):

$$k_1 = \frac{\partial x}{\partial L} = -\frac{\partial y}{\partial q} = -\sum_{j=1}^n (j C_j Q_{(j-1)});$$

$$k_2 = \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial y}{\partial L} = \sum_{j=1}^n (j C_j P_{(j-1)}); \quad (7. 28)$$

Теперь выражения для частного масштаба длин и сближения меридианов принимают вид:

$$m = \frac{1}{r} \sqrt{k_1^2 + k_2^2}; \quad \gamma = \arctg \left(\frac{k_1}{k_2} \right) \quad (7. 29)$$

Приведенные формулы работают в прямой задаче, когда по сфероидическим элементам требуется вычислить их образы на плоскости (задача отображения поверхности эллипсоида на плоскости). Если требуется решить обратную задачу, когда по элементам на плоскости проекции требуется вычислить соответствующие сфероидические элементы, берем за основу вторые уравнения из (7. 21) – (7. 26). В результате аналогично получим:

Для связи координат в обратном переходе получаем уравнения

$$\Delta q = \sum_{j=1}^n (C'_j P'_j); \quad l = \sum_{j=1}^n (C'_j Q'_j); \quad (7. 30)$$

где $P'_j = P'_1 P'_{(j-1)} - Q'_1 Q'_{(j-1)}$; $Q'_j = P'_1 Q'_{(j-1)} + Q'_1 P'_{(j-1)}$ при условии $P'_0 = 1$; $Q'_0 = 0$. Это также гармонические полиномы, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Здесь следует иметь в виду также $P'_1 = \Delta x$; $Q'_1 = \Delta y$.

Для частного масштаба длин и сближения меридианов имеем также

$$m = \frac{1}{r\sqrt{k_1'^2 + k_2'^2}}; \quad \gamma = \arctg\left(\frac{k_1'}{k_2'}\right) \quad (7.31)$$

Здесь производные, входящие в уравнения Коши – Римана получают выражения

$$\begin{aligned} k_1' &= \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} = -\sum_{j=1}^n (jC_j' Q'_{(j-1)}) \\ k_2' &= \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \sum_{j=1}^n (jC_j' P'_{(j-1)}) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Как видно из полученных выражений, они общие для любой из определенного нами класса геодезических проекций. Вид проекции определяется только коэффициентами характеристических уравнений (7.26).

Аналогичным образом можно получить общие алгоритмические выражения для уравнений связи полярных и параметрических координат.

7. 6. Характеристические уравнения некоторых геодезических проекций

7. 6. 1. Поперечно – цилиндрические проекции

В поперечно – цилиндрических геодезических проекциях ставится условие, чтобы длина дуги меридиана эллипсоида, принимаемого на плоскости проекции за осевой, изображалась без искажений (в натуральную величину), когда частный масштаб длин вдоль меридиана равен единице ($m_0 = 1$) – это проекция Гаусса – Крюгера, либо при условии $m_0 \leq 1 = const$ – универсальная проекция Меркатора, известная как проекция *UTM*. Отсюда видно, что проекция *UTM* является обобщением проекции Гаусса – Крюгера.

Здесь можем записать для уравнения из (7.25)

$$X_0 = f(q_0) = m_0 (X_0)_{\text{эллипс.}},$$

где $(X_0)_{\text{эллипс.}}$ – длина дуги меридиана эллипсоида, отсчитанная от экватора до средней точки проекции с широтой B_0 . И первое уравнение из (7.26) можем записать в виде

$$\Delta X = m_0 \left(\left(\frac{dX}{dq} \right)_0 \Delta q + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 X}{dq^2} \right)_0 \Delta q^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 X}{dq^3} \right)_0 \Delta q^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4 X}{dq^4} \right)_0 \Delta q^4 + \dots \right). \quad (7.33)$$

Производные в этом уравнении получаем следующим образом. Как известно, дифференциал дуги меридиана эллипсоида имеет выражение

$$dX = M dB = \frac{c}{V^3} dB,$$

откуда можем записать

$$\frac{dX}{dB} = M = \frac{c}{V^3}$$

и далее по правилу дифференцирования неявных функций

$$\frac{dX}{dq} = \left(\frac{dX}{dB} \right) \left(\frac{dB}{dq} \right) = M \left(\frac{dB}{dq} \right) = \frac{c}{V^3} \left(\frac{dB}{dq} \right) = \frac{c}{V^3} V^2 \cos B = \frac{c}{V} \cos B \quad (7.34)$$

Здесь производную $\frac{dB}{dq} = V^2 \cos B$ получаем из (7.18). Производная, вычисленная по координатам начальной точки проекции, имеет выражение

$$\left(\frac{dX}{dq} \right)_0 = \frac{c}{V_0} \cos B_0$$

Далее действуем по известным правилам дифференциального исчисления, когда вторая производная вычисляется как производная от первой и т. д. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dq^2} &= \frac{d}{dq} \left(\frac{dX}{dq} \right) = \frac{d}{dB} \left(\frac{dX}{dq} \right) \left(\frac{dB}{dq} \right) = \frac{d}{dB} \left(\frac{c}{V} \cos B \right) V^2 \cos B = -\frac{c}{V} \cos B \sin B ; \\ \frac{d^3 X}{dq^3} &= \frac{d}{dq} \left(\frac{d^2 X}{dq^2} \right) = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^2 X}{dq^2} \right) \left(\frac{dB}{dq} \right) = \frac{d}{dB} \left(-\frac{c}{V} \cos B \sin B \right) V^2 \cos B = \frac{c}{V} \cos^3 B (tg^2 B - V^2). \end{aligned}$$

Последовательно вычисляем необходимое число производных и, следовательно, коэффициентов разложения (7.33). При этом заметим, что в этом разложении коэффициенты удовлетворяют условию $C_j \leq \frac{1}{j!} (c \cos B_0)$, а степени $(\Delta q)^j$

представляют собой малые убывающие величины при малых Δq . Для Республики Беларусь, например, $B_0 \approx 54^\circ$ и $\cos B_0 \leq 3.8 \times 10^6$ м. Если размеры изображаемой в одной зоне области ограничить разностью широт и долгот

$$(\Delta q)_{\max} \approx (\Delta L)_{\max} \leq 6^\circ \approx 0.1,$$

а вычисления координат производить с точностью до 0.001 м, что соответствует стандартам точности современных измерительных технологий, то в разложениях (7.33) достаточно ограничиться восьмыми степенями разложений. При этом замечаем, что остаточный член в форме Лагранжа будет

$$\rho_{(9)}(x, y) \approx (3.8 \times 10^6) (0.1)^9 / 9! \leq 0.001 \text{ м.}$$

Действуя указанным ранее образом, вычисляем необходимое число производных и в результате получаем следующие выражения коэффициентов первого

характеристического уравнения из (7. 26) для поперечно – цилиндрических проекций :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0; & C_2 &= -\frac{C_1}{2} \sin B_0; & C_3 &= \frac{C_1}{6} \cos^2 B_0 (tg^2 B_0 - V_0^2); \\
 C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (5 - tg^2 B_0 + 9\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4); \\
 C_5 &= \frac{C_1}{120} \cos^4 B_0 (5 - 18tg^2 B_0 + tg^4 B_0 + 14\eta_0'^2 - 58\eta_0'^2 tg^2 B_0); \\
 C_6 &= \frac{C_1}{720} \sin B_0 \cos^4 B_0 (58tg^2 B_0 - 61 - tg^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 330\eta_0'^2 tg^2 B_0); & (7. 35) \\
 C_7 &= \frac{C_1}{5040} \cos^6 B_0 (479tg^2 B_0 - 61 - 179tg^4 B_0 + tg^6 B_0); \\
 C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B_0 \cos^6 B_0 (1385 - 3111tg^2 B_0 + 543tg^4 B_0 - tg^6 B_0)
 \end{aligned}$$

Здесь используем ранее принятое обозначение $\eta_0'^2 = e'^2 \cos^2 B_0$, а в коэффициентах C_5 и C_6 по малости отброшены слагаемые с множителем $\eta_0'^4$, а в коэффициентах C_7 и C_8 – с множителем $\eta_0'^2$.

Полагая значение $m_0 = 1$, получаем проекцию Гаусса – Крюгера, а при $m_0 = 0.9996$ – проекцию UTM. Вообще говоря, варьируя значением m_0 , можно управлять распределением искажений длин в пределах изображаемой области. О том, как это делается, мы остановимся позднее.

Поперечно-цилиндрические проекции наиболее удобны для изображения на плоскости областей эллипсоида, вытянутых вдоль меридиана.

7. 6. 2. Конические проекции

Известная конформная коническая проекция Ламберта, которая широко применяется в мировой геодезической практике для создания топографических

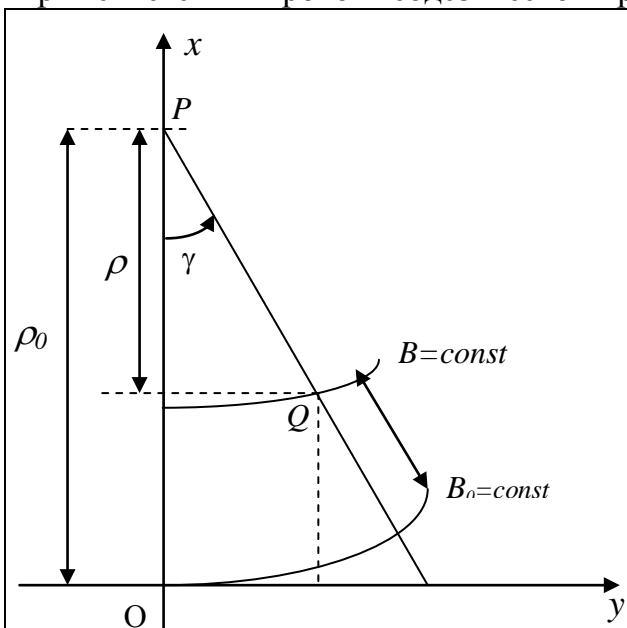


Рис. 7. 4

карт и для математической обработки геодезических измерений, задается уравнениями связи координат, следующими из рисунка 7. 4.

$$\begin{aligned}
 x &= \rho_0 - \rho \cos \gamma \\
 y &= \rho \sin \gamma
 \end{aligned}
 \quad (7. 36)$$

Для осевого меридиана имеем сближение $\gamma = 0$, следовательно, получаем для его длины от широты стандартной параллели $B_0 = const$ до широты текущей точки выражение

$$\Delta X = \rho_0 - \rho \quad (7. 37)$$

Для конических проекций всегда выполняется уравнение

$$\gamma = \beta(L - L_0) = \beta l \quad (7.38)$$

и в конформных проекциях масштаб не зависит от направления, поэтому можно приравнять отношения

$$m = -\frac{d\rho}{MdB} = \frac{\rho\beta}{N \cos B} \quad (7.39)$$

Из последнего уравнения можем записать

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta \frac{MdB}{N \cos B} = -\beta dq, \quad (7.40)$$

после интегрирования которого получаем

$$\ln \rho = -\beta \Delta q + \ln k; \quad \text{или} \quad \rho = ke^{-\beta \Delta q} \quad (7.41)$$

Несложно заметить, что постоянная интегрирования $k = \rho_0 = m_0 N_0 \operatorname{ctg} B_0$, а $\beta = \sin B_0$. Тогда для длины изображения любого меридиана эллипсоида на плоскости конической проекции получаем из (7.37), учитывая (7.41)

$$\Delta X = \rho_0 (1 - e^{-\sin B_0 \Delta q}) \quad (7.42)$$

Раскладывая в ряд показательную функцию по формуле

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

получаем характеристическое уравнение для конических проекций

$$\Delta X = \sum_1^n (C_j \Delta q^j),$$

где для коэффициентов получаем рекуррентное выражение

$$C_j = \frac{C_1}{j!} (-1)^{(j-1)} (\sin B_0)^{(j-1)}; \quad \text{при} \quad C_1 = m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0 \quad (7.43)$$

Это обстоятельство указывает на достоинство конических проекций, состоящее в том, что здесь можно в автоматическом режиме формировать любое число членов разложений в (7.43) и общем алгоритме геодезических проекций.

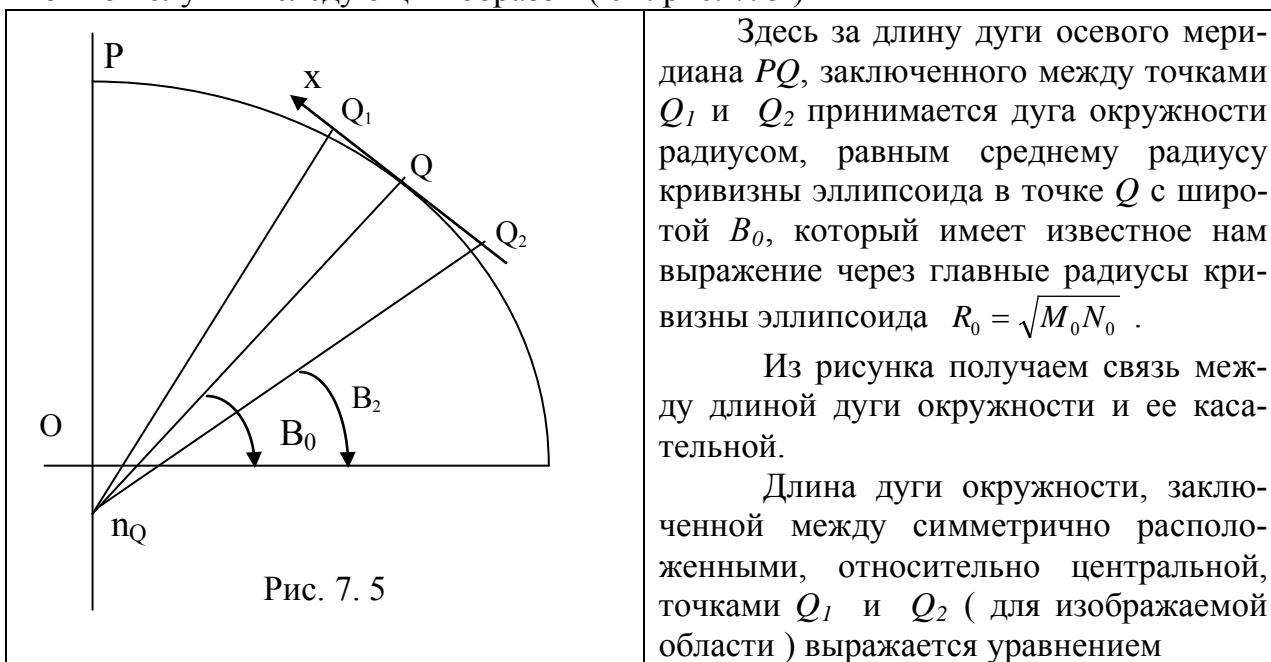
При значении $m_0 = 1$ на стандартной параллели проекции получают широко применяющуюся для геодезических целей коническую проекцию Ламберта. При

иных значениях $m_0 \leq 1$ можно получать видоизмененные конические проекции, как это имеет место в цилиндрических проекциях (Гаусса – Крюгера и *UTM*).

Конические проекции наиболее удобно применять для отображения на плоскости областей, вытянутых вдоль параллели.

7. 6. 3. Азимутальные проекции

Французский инженер Руссиль в 1924 году предложил для геодезических и топографических работ проекцию на касательную плоскость, являющуюся частным случаем азимутальных проекций, характеристическое уравнение которой можно получить следующим образом (см. рис. 7. 5)



$$S = 2R_0 \Delta B$$

Здесь $\Delta B = B - B_0$, а длина изображения осевого меридиана на плоскости проекции (касательной к окружности в точке Q)

$$\Delta X = 2R_0 \operatorname{tg}(\Delta B) = 2R_0 \operatorname{tg}\left(\frac{S}{2R_0}\right)$$

Разлагая в ряд функцию малого аргумента, получаем

$$\Delta X = S + \frac{S^3}{12R_0^2} + \frac{S^5}{120R_0^4} + \frac{17S^7}{20160R_0^4} + \dots \quad (7. 44)$$

В общем случае, когда картинная плоскость может не только касаться поверхности эллипсоида, но и пересекать ее (секущая плоскость), можем записать уравнение (7. 44) для азимутальных проекций в виде

$$\Delta X = m_0 \left(S + \frac{S^3}{12R_0^2} + \frac{S^5}{120R_0^4} + \frac{17S^7}{20160R_0^4} + \dots \right). \quad (7. 45)$$

Учитывая то, что в проекции Гаусса – Крюгера осевой меридиан изображается на плоскости без искажений, в данном уравнении под S можем понимать значение, полученное по формуле для этой проекции, а в (7. 35) положить $m_0 = 1$. После тождественных преобразований получаем для коэффициентов характеристического уравнения азимутальных проекций

$$\begin{aligned}
 C_1 &= m_0 \frac{c}{V_0} \cos B_0; & C_2 &= -\frac{C_1}{2} \sin B_0; & C_3 &= \frac{C_1}{12} \cos^2 B_0 (2tg^2 B_0 - V_0^2); \\
 C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B_0 \cos^2 B_0 (2 - tg^2 B_0 + 6\eta_0'^2 + 4\eta_0'^4); \\
 C_5 &= \frac{C_1}{240} \cos^4 B_0 (2 - 11tg^2 B_0 + 2tg^4 B_0 + 12\eta_0'^2 - 9\eta_0'^2 tg^2 B_0); \\
 C_6 &= \frac{C_1}{1440} \sin B_0 \cos^4 B_0 (26tg^2 B_0 - 17 - 2tg^4 B_0 - 270\eta_0'^2 + 570\eta_0'^2 tg^2 B_0); & (7. 46) \\
 C_7 &= \frac{C_1}{20160} \cos^6 B_0 (180tg^2 B_0 - 17 - 114tg^4 B_0 + 4tg^6 B_0); \\
 C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B_0 \cos^6 B_0 (62 - 192tg^2 B_0 + 603tg^4 B_0 - tg^6 B_0)
 \end{aligned}$$

В азимутальных проекциях также имеется возможность управления распределением искажений внутри изображаемой области, моделируя значение $m_0 \leq 1$. При этом, полагая $m_0 = 1$, получим проекцию Руссиля.

Азимутальные проекции удобно применять для областей округлой формы.

7. 7. Выбор значения масштаба в геодезических проекциях

Как уже отмечалось ранее, три вида геодезических проекций, рассмотренных нами, являются наиболее распространенными в мировой геодезической практике, при этом все они являются перспективными и симметричными относительно распределения всех видов искажений внутри изображаемой зоны. При этом во всех этих проекциях линейные искажения, обусловленные масштабом, существенно более значимы по сравнению с искажениями, обусловленными кривизной изображения геодезической линии. В поперечно-цилиндрических проекциях масштаб в точке возрастает примерно пропорционально квадрату ее ординаты (удаления от осевого меридиана), в конических – примерно пропорционально квадрату абсциссы (удаления от стандартной параллели), в азимутальных – примерно пропорционально квадрату удаления от центральной точки проекции. Линии постоянного масштаба или равных линейных искажений называют **изоколами**. При этом в цилиндрических проекциях изоколы симметрично расположены относительно изображения осевого меридиана, в конических – симметрично относительно изображения стандартной параллели, в азимутальных – окружности, описанные вокруг центральной точки проекции.

Положим значение масштаба равным $m_0 = 1$ на осевом меридиане цилиндрических, на стандартной параллели конических и в центральной точке азимутальных проекций. Поставим условие, чтобы максимальное значение масштаба

m_{max} для всей изображаемой зоны было бы настолько больше единицы, насколько значение масштаба m_0 меньше единицы.

$$1 - m_0 = m_{max} - 1$$

Значение масштаба m_{max} при $m_0 < 1$ связано со значением масштаба m'_{max} при $m'_0 = 1$ следующим очевидным уравнением

$$m_{max} = m_0 m'_{max}$$

Отсюда получаем для значения масштаба m_0 , при котором в пределах всей изображаемой зоны масштаб по абсолютному значению будет меньше всего отличаться от единицы. В этом случае максимальные для данной зоны линейные искажения будут наименьшими.

$$m_0 = \frac{2}{1 + m'_{max}} \quad (7.47)$$

Если требуется получить такую проекцию, для которой линейные искажения отсутствуют вдоль какой-либо изоколы $m = const$, то достаточно принять значение

$$m_0 = 1 / m. \quad (7.48)$$

7. 8. Проекция Гаусса – Крюгера в традиционном представлении

7. 8. 1. Формулы для вычисления координат

Как отмечено ранее, проекция Гаусса – Крюгера с 1928 г и до настоящего времени традиционно используется в Российской Федерации, у нас и в ряде других стран. В тридцатые годы прошлого столетия вычисления велись вручную, для их облегчения необходимо было составлять вспомогательные таблицы. В этом случае применялась зональная система координат, когда долготы отсчитывались от среднего меридиана зоны ($l = L - L_0$). Ординаты также отсчитывались от изображения этого меридиана в виде прямой линии, которая принималась за ось ординат. Общие уравнения (7.21) в зональной системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + il) \\ B + il &= \varphi(x + iy) \end{aligned}$$

При малых размерах координатных зон правые части этих уравнений можно разложить в ряд по формуле Тейлора по степеням малых величин l и y .

$$\begin{aligned} x + iy &= f(q + il) = f(q) + C_1(il) + C_2(il)^2 + C_3(il)^3 + \dots \\ B + il &= \varphi(x + iy) = \varphi(x) + C'_1(iy) + C'_2(iy)^2 + C'_3(iy)^3 + \dots \end{aligned} \quad (7.49)$$

где следует иметь в виду условия (7. 25) – (7. 26) для поперечно-цилиндрической проекции Гаусса – Крюгера при $m_0 = 1$. В результате получаем уравнения связи координат

$$\begin{aligned} x &= X - C_2 l^2 + C_4 l^4 + \dots; & y &= C_1 l - C_3 l^3 + \dots \\ B &= B_x - C_2' y^2 + C_4' y^4 + \dots; & l &= C_1' y - C_3' y^3 + \dots \end{aligned} \quad (7. 50)$$

Здесь коэффициенты C_j и C_j' имеют выражения :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{c}{V} \cos B; & C_2 &= -\frac{C_1}{2} \sin B; & C_3 &= \frac{C_1}{6} \cos^2 B (tg^2 B - V^2); \\ C_4 &= \frac{C_1}{24} \sin B \cos^2 B (5 - tg^2 B + 9\eta'^2 + 4\eta'^4); \\ C_5 &= \frac{C_1}{120} \cos^4 B (5 - 18tg^2 B + tg^4 B + 14\eta'^2 - 58\eta'^2 tg^2 B); \\ C_6 &= \frac{C_1}{720} \sin B \cos^4 B (58tg^2 B - 61 - tg^4 B - 270\eta'^2 + 330\eta'^2 tg^2 B); \\ C_7 &= \frac{C_1}{5040} \cos^6 B (479tg^2 B - 61 - 179tg^4 B + tg^6 B); \\ C_8 &= \frac{C_1}{40320} \sin B \cos^6 B (1385 - 3111tg^2 B + 543tg^4 B - tg^6 B) \\ C_1' &= \frac{V_x}{c \cos B_x}; & C_2' &= -\frac{C_1'}{2N_x} V_x \sin B_x; & C_3' &= -\frac{C_1'}{6N_x^2} (1 + 2tg^2 B_x + \eta_x^2); \\ C_4' &= \frac{C_1'}{24N_x^3} V_x^2 \sin B_x (5 + 3tg^2 B_x + \eta_x^2 - 9\eta_x^2 tg^2 B_x - 4\eta_x^4); \\ C_5' &= \frac{C_1'}{120N_x^4} (5 + 28tg^2 B_x + 24tg^4 B_x + 6\eta_x^2 + 8\eta_x^2 tg^2 B_x); \\ C_6' &= -\frac{C_1'}{720N_x^5} V_x^2 \sin B_x (90tg^2 B_x + 61 + 45tg^4 B_x + 46\eta_x^2 - 252\eta_x^2 tg^2 B_x - 90\eta_x^2 tg^4 B_x); \\ C_7' &= -\frac{C_1'}{5040N_x^6} (662tg^2 B_x + 61 + 1320tg^4 B_x + 720tg^6 B_x); \\ C_8' &= \frac{C_1'}{40320N_x^7} V_x^2 \sin B_x (1385 + 3633tg^2 B_x + 4095tg^4 B_x + 1575tg^6 B_x) \end{aligned} \quad (7. 52)$$

Обращаем внимание на то, что коэффициенты (7. 51) вычисляются по широте каждой точки, а коэффициенты (7. 52) – по широте B_x – соответствующей значению $X = x$ на осевом меридиане. Для их вычисления использовались специальные таблицы. Заметим при этом, что коэффициенты (7. 35) постоянные в пределах всей территории, изображаемой в одной координатной зоне. При размерах

координатной зоны до 8^0 в формулах (7. 50) можно отбросить C_7 и C_8 . При этом погрешность вычисления плоских прямоугольных координат не более 0. 001м, а широт и долгот $-0. 0001''$.

7. 8. 2. Сближение меридианов в проекции Гаусса-Крюгера

Сближение меридианов используется для перехорда от азимута геодезической линии эллипсоида к дирекционному углу ее изображения на плоскости. Формула для вычисления имеет вид (7. 29), в которой проще вычислять частные производные (7. 28) от плоских координат по долготе. В результате имеем для шестиградусной зоны после преобразований в пределах необходимой точности вычислений:

$$\frac{\partial x}{\partial l} = lN \sin B \cos B \left(1 + \frac{l^2}{6} \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta'^2 + 4\eta'^4) \right) ; \quad (7. 53)$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = N \cos B \left(1 + \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta'^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \frac{l^4}{24} \right)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin B \operatorname{tg} l + \eta'^2 \sin B \cos^2 B l^3 \left(1 + \frac{2}{3} \eta'^2 + \cos^2 B l^2 \right) . \quad (7. 54)$$

Можно заметить, что сближение меридианов в данной проекции имеет максимальное значение на краю зоны при $B \rightarrow 90^0$. На полюсе пересекаются все меридианы, в том числе, и осевой, поэтому здесь не может существовать понятия сближения меридианов. Для приближенных расчетов полезно помнить выражение

$$8. \approx l \sin B.$$

7. 8. 3. Частный масштаб длин в проекции Гаусса – Крюгера

Как уже отмечено ранее, частный масштаб длин (масштаб) имеет большое значение в геодезических проекциях и является одной из их численных характеристик. Масштаб служит для вычисления поправок в длины геодезических линий эллипсоида при вычислении длины их изображений на плоскости (7. 15). Подставляя значения производных (7. 53) в формулу (7. 29), получаем после преобразований с удержанием необходимой точности в шестиградусной зоне:

$$m^2 = 1 + \cos^2 B (1 + \eta'^2) l^2 + \cos^4 B (8 - 4\operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{12} . \quad (7. 55)$$

Извлекая корень квадратный, получим с той же точностью

$$m = 1 + \cos^2 B (1 + \eta'^2) \frac{l^2}{2} + \cos^4 B (5 - 4\operatorname{tg}^2 B) \frac{l^4}{24} . \quad (7. 56)$$

Полученная формула может служить для вычисления масштаба, однако на практике чаще известны плоские прямоугольные координаты точек, для которых необходимо знание масштаба. Поэтому перейдем в формуле (7. 56) от разности долгот l к ординатам y . Для этого воспользуемся (7. 50) и (7. 51), откуда можем записать с принятой точностью

$$l = \frac{y}{C_1 - C_3 l^2} = \frac{y}{C_1 - \frac{C_3}{C_1} y^2} = \frac{y}{C_1} \left(1 + \frac{C_3}{C_1^2} y^2 \right); \quad l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 B) \frac{y^4}{3N^4}; \quad l^4 \cos^4 B = \frac{y^4}{N^4}.$$

Теперь выражение (7. 56) может быть записано в виде

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4}. \quad (7. 57)$$

Здесь в третьем слагаемом принято $N^4 = R^4$, что допустимо с ранее принятой точностью.

Анализируя полученную формулу, замечаем, что линии равных масштабов и равных линейных искажений (изоколы) проходят симметрично и практически параллельно изображению осевого меридиана, так как значение среднего радиуса кривизны R незначительно изменяется с изменением широты.

7. 8. 4. Кривизна изображения геодезической линии и поправки за нее

Как видно из формул (7. 13) и (7. 16), для перехода от длины и направления изображенной на плоскости проекции геодезической линии эллипсоида к длине и направлению ее хорды необходимо вводить поправки за кривизну ее изображения.

Для проекции Гаусса – Крюгера уравнение Схольса (7. 14) принимает вид с учетом принятой точности в выражении для масштаба (7. 57)

$$\Gamma = -\frac{y}{R^2} \cos \alpha + \frac{y^3}{3R^4} \cos \alpha - \frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2 \sin \alpha. \quad (7. 58)$$

Здесь мы учли следующие выражения для логарифма масштаба и производных:

$$\ln m = \ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \dots = \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{12R^4} + \dots;$$

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y} = \frac{y}{R^2} - \frac{y^3}{3R^4}; \quad \frac{\partial \ln m}{\partial x} = \frac{y^2}{2c^2} \frac{dV^4}{dB} \frac{dB}{dx} = -\frac{e^2 \sin 2B}{R^3} y^2$$

Далее вычисляем производную

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \frac{\partial\Gamma}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\alpha} \frac{d\alpha}{dS} = -\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{R^2}. \quad (7.59)$$

Здесь мы имеем в виду очевидные соотношения:

$$\frac{dy}{dS} = \sin\alpha; \quad \frac{d\alpha}{dS} = \Gamma.$$

Подставляя полученные величины в уравнение (7.13), получаем поправку в горизонтальное направление, а также в дирекционный угол за кривизну изображения геодезической линии эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера:

$$\delta_{12} = -\frac{y_1}{2R_1^2} S \cos\alpha_{12} + \frac{y_1^3}{6R_1^4} S \cos\alpha_{12} - \frac{e^2 \sin 2B_1}{2R_1^3} y_1^2 S \sin\alpha_{12} - \frac{S^2}{6R_1^2} \sin\alpha_{12} \cos\alpha_{12} \quad (7.60)$$

Здесь мы пренебрегли расхождениями между длиной хорды S и длиной изображения геодезической линии s , а также поправкой δ_{12} в дирекционном угле. Это допустимо при длинах сторон до 30 км и при значениях $y_{max} = 320$ км для шестиградусных зон на любой широте.

Далее преобразуем полученную формулу к виду, более удобному для практического применения, имея в виду соотношения:

$$S \cos\alpha_{12} = \Delta x_{12} = x_2 - x_1; \quad S \sin\alpha_{12} = \Delta y_{12} = y_2 - y_1;$$

$$y_m = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad y_1 = y_m - \frac{\Delta y}{2}.$$

В результате получаем формулу для вычислений поправки в триангуляции 1 класса

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_m^2} \left[\Delta x \left(y_m - \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{e^2 y_m^2}{R_m} \Delta y \sin 2B_m \right] \quad (7.61)$$

Поменяв местами индексы в приращениях координат, получим приращения в принятых обозначениях с обратными знаками и для обратного направления формулу для вычислений

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} \left[\Delta x \left(y_m + \frac{\Delta y}{6} - \frac{y_m^3}{3R_m^2} \right) + \frac{e^2 y_m^2}{R_m} \Delta y \sin 2B_m \right] \quad (7.62)$$

Точность вычислений поправок по приведенным формулам не ниже $0.001''$ при расстояниях между точками до 60 км.

В триангуляции 2 класса поправки вычисляются с точностью не ниже $0.01''$, а длины сторон не более 20 км. В этом случае применяют более простые формулы

для вычислений, которые получаем из формул (7. 61) – (7. 62), отбросив по малости третий и четвертый слагаемые

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_m^2} \Delta x \left(y_m - \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{\rho''}{6R_m^2} \Delta x (2y_1 + y_2) ; \quad (7. 63)$$

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho''}{2R_m^2} \Delta x \left(y_m + \frac{\Delta y}{6} \right) = \frac{\rho''}{6R_m^2} (y_1 + 2y_2) \quad (7. 64)$$

В триангуляции 3 и низших классов поправки вычисляют по формулам, еще более простым. Здесь вместо ординат двух точек y_1, y_2 берут среднюю ординату y_m и тогда получают из (7. 63) – (7. 64)

$$\delta_{12} = -\delta_{21} = -\frac{\rho''}{2R_m^2} y_m \Delta x . \quad (7. 65)$$

Эту формулу можно вывести другим путем. Для этого рассмотрим рисунок

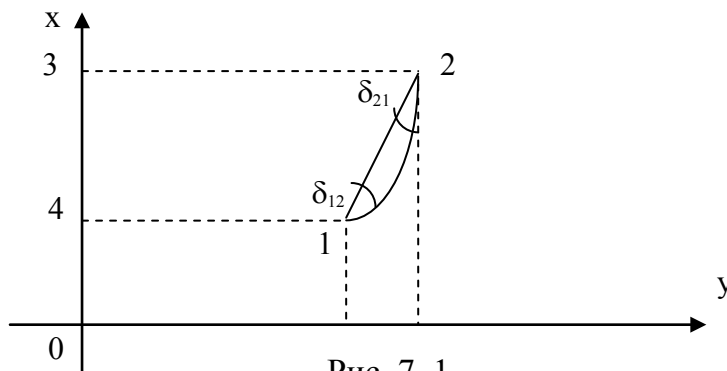


Рис. 7. 1

На рисунке имеем изображение геодезической линии эллипсоида на плоскости в виде кривой 1-2. Углы между этой кривой и ее хордой являются искомыми поправками. Прямые линии 1-4 и 2-3 являются изображениями геодезических линий, проходящих на поверхности эллипсоида через точки 1 и 2 перпендикулярно осевому меридиану. Поскольку проекция конформна, углы изображаются без искажений. На поверхности эллипсоида сумма внутренних углов трапеции 1234 больше 360^0 на величину сферического избытка, а на плоскости – на величину поправок. Следовательно, можем записать равенства:

$$\delta_{12} - \delta_{21} = -\varepsilon; \quad \delta_{12} = -\delta_{21} = -\varepsilon / 2 .$$

Как известно, сферический избыток вычисляется по формуле

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{P}{R^2} ,$$

где P – площадь трапеции, R – радиус сферы. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований $y_m = (y_2 + y_1)/2$ на ее высоту $\Delta x = (x_2 - x_1)$, следовательно, получаем формулу (7. 65).

Полезно заметить предельные значения поправок, которые будут иметь место на краю координатной зоны, для направления, параллельного осевому меридиану. Для шестиградусной зоны имеем $y_{max} = 320\text{км}$, в триангуляции 1 класса будет $\Delta x_{max} = S_{max} = 30\text{км}$ и значение поправки не превзойдет величины $\delta_{max} \approx 24''$.

Рассчитаем поправку в длину за кривизну, которая вычисляется по формуле (7. 16). Значение кривизны рассчитываем в проекции Гаусса – Крюгера по формуле (7. 58), в которой достаточно учесть лишь первое слагаемое. В результате получаем для максимальной поправки в относительной мере

$$\frac{d - S}{S} = \frac{\Delta S}{S} \approx \frac{y_{max}^2}{24R_m^4} S_{max}$$

Для шестиградусной зоны и триангуляции 1 класса при ранее принятых значениях получаем величину не более 10^{-10} . Таким образом видим, что эта поправка пренебрегаемо мала и может не учитываться во всех случаях геодезической практики.

7. 8. 5. Практика применения проекции Гаусса – Крюгера

Плоские прямоугольные координаты, вычисленные по геодезическим координатам в какой-либо геодезической проекции, находят самое широкое практическое применение. В данном случае существенно облегчается решение любых геодезических задач на участках земной поверхности, размеры которых допускают их изображение в одной координатной зоне. Вместе с тем, следует иметь в виду, что в проекции Гаусса – Крюгера принята международная разграфка шестиградусных зон. Так долгота осевых меридианов рассчитывается по формуле

$$L_0 = 6n - 3,$$

где n – номер зоны. Территория Беларуси расположена в четвертой, пятой и шестой шестиградусных зонах проекции Гаусса – Крюгера с долготами осевых меридианов в 21^0 , 27^0 и 33^0 .

Трапеции топографических карт в масштабе 1 : 1 000 000 образуют колонну, расположенную в соответствующей координатной зоне, номер колонны определяется выражением $30 + n$. Счет широт граничных параллелей, образующих пояса трапеций топографической карты в масштабе 1 : 1 000 000, ведется от экватора через четыре градуса. Территория Беларуси расположена в трех поясах международной разграфки, ограниченных параллелями с широтами в 48^0 , 52^0 , 56^0 , 60^0 .

Таким образом территория нашей страны отображается на семи трапециях топографической карты масштаба 1 : 1 000 000. В пределах каждой шестиградусной координатной зоны размещается целое число трапеций всего масштабного ряда топографических карт от 1 : 500 000 до 1 : 10 000.

Системы прямоугольных координат в каждой координатной зоне проекции Гаусса – Крюгера совершенно идентичны. Для того, чтобы различать, в какой координатной зоне расположены точки на практике принято к ординате слева приписывать номер зоны. Чтобы избежать на топографических картах отрицательных ор-

динат, к ним прибавляют 500 км. Таким образом используют условные ординаты, связанные с истинными выражением

$$y_{усл.} = y_{ист.} + (0.5 - n) 10^6. \quad (7.66)$$

Например, если в каталоге имеем условную ординату $y_{усл.} = 5\,365\,421,216$ м, это означает, что точка расположена в пятой координатной зоне с долготой осевого меридиана 27^0 , а ее истинная ордината будет $y_{ист.} = -134\,578,784$ м. Абсциссы в каталогах координат приводятся истинные, отсчитанные от экватора.

Следует заметить, что линейные размеры координатных зон изменяются с изменением широты. Так, если на экваторе эти размеры максимальны и составляют 668 км, то с изменением широты эта величина изменяется по формуле

$$2(y_{макс})_{км} \approx 668 \cos B.$$

Так для территории Республики Беларусь размеры шестиградусных зон изменяются от 420 км на широте ее южной точки до 374 км на широте ее северной точки. Максимальные удаления от осевого меридиана ($y_{макс}$), влияющие на искажения в проекции будут в два раза меньше.

Территории, на которых создана геодезическая сеть, может быть расположена в двух и более координатных зонах, следовательно, координаты исходных пунктов вычислены и приведены в каталогах в разных зонах (координатных системах). В этом случае возникает необходимость преобразования координат всех исходных пунктов в одну зону. Эта задача не вызывает каких-либо проблем, ее решение приведем дальше. Но вместе с тем это вызывает определенные неудобства и затрудняет массовые геодезические и топографические работы. Для того, чтобы свести к минимуму такого рода проблемы, на практике приняты семиградусные зоны с разностью долгот осевых меридианов в 6^0 . В каталогах координаты пунктов государственной геодезической сети, попадающих в полосу перекрытия, приводят в двух зонах. При выборе координат из каталогов необходимо обращать внимание на то, чтобы первые цифры ординат совпадали.

На трапециях топографических карт, попадающих в зону перекрытия, наносятся выходы координатной сетки смежной зоны. Это облегчает работу с топографическими картами на объектах, расположенных в разных зонах.

Необходимость преобразования координат возникает, несмотря на перекрытия зон. Например, при инженерно-геодезическом обеспечении проектирования, строительства и эксплуатации инженерных и иных объектов, когда предъявляются повышенные требования к величинам искажений отображаемых на плоскости геометрических параметров объектов. В этих случаях применяют условные системы плоских прямоугольных координат, когда в качестве осевого принимают меридиан со средней долготой объекта. В последние годы стали применяться проекции, отличные от проекции Гаусса – Крюгера. В этом случае также необходимо уметь решать задачу преобразования систем координат из одной проекции в другую. Раньше для решения этой задачи применялись самые различные по точности и сложности использования методы, от графических до аналитических, основанных на применении специальных таблиц. В настоящее время геодезические вычисления производятся, в основном, с применением современных ЭВМ. Поэтому наилучшим образом задача преобразования систем координат решается по следующей схеме

$$\left\{ x, y \right\}_A \rightarrow \left\{ B, l_A \right\} \rightarrow \left\{ B, l_B \right\} \rightarrow \left\{ x, y \right\}_B \quad (7. 67)$$

Первое действие предполагает вычисление геодезических широт и разности долгот по плоским прямоугольным координатам данной зоны A , далее переходят к разности долгот в другой зоне B . На последнем этапе производят вычисление плоских прямоугольных координат по геодезическим в зоне B . Эта схема работает также и при переходе от одной проекции к другой.

7. 9. Современные требования к геодезическим проекциям

С развитием измерительных технологий, прежде всего основанных на спутниковых системах позиционирования *GPS - NAVSTAR* (США) и *ГЛОНАСС* (Российская Федерация), когда на целый порядок повышается точность координатных определений по сравнению с классическими технологиями, существенно повышается оперативность работ и автоматизируются процессы формирования и математической обработки баз картографо геодезических данных коренным образом меняются требования к их представлению в определенной координатной среде. Естественно, в этих условиях формирование координатной среды должно производиться с учетом как новых измерительных и вычислительных возможностей, так и с учетом требований автоматизированных информационных технологий в описании и представлении пространственно распределенных объектов, несущих самую разнообразную информацию.

Для целей навигации и описания взаимного положения объектов, расположенных на больших территориях, включающих группы государств, континенты и Землю в целом, а также для решения специальных научных и технических задач геодезии применяется система геодезических пространственных координат (X, Y, Z или B, L, H) на общеземном или референц – эллипсоиде. Такие системы координат рассмотрены нами ранее. Порядок их установления будет рассмотрен нами в следующем разделе курса «Высшая геодезия», который называется «Теоретическая или физическая геодезия».

Для геодезического обеспечения самых различных геоинформационных технологий удобнее и более доступна система плоских прямоугольных координат. Сформулируем общие требования, предъявляемые в современных условиях к формированию таких систем координат:

- строгое математическое обоснование и формирование систем координат на основе теории отображения поверхности земного эллипсоида и плоскости (геодезические проекции);
- математически обоснованная высокоточная взаимосвязь с системой геодезических пространственных координат;
- математически обоснованная и достаточно точная взаимосвязь между различными системами плоских прямоугольных координат;
- обеспечение государственного контроля, доступности, простоты и удобства практического применения для различных пользователей;
- обеспечение минимально возможных искажений отображаемых геометрических образов и взаимного положения объектов;
- автоматический выбор и взаимосвязь различных систем координат на ЭВМ.

Следует отметить то, что в современных условиях происходит сближение понятий геодезическая и картографическая проекции, как это понималось ранее. Это имеет место, прежде всего, при создании электронно-цифровых аналогов топографических карт, как картографической основы высокоточных ГИС. Такие карты в современных условиях все более создаются с использованием материалов дистанционного зондирования земной поверхности методами аэрокосмической съемки и их последующей обработки фотограмметрическими технологиями. Совершенствуются аэрофотосъемочные и стремительно развиваются электронно-сканирующие системы, повышается их разрешающая способность и точность. Таким образом, появляются новые возможности повышения качества и точности самых различных карт, в том числе, топографических, оперативности их обновления. Известны уже в настоящее время технологии поддержания информации на специальных картах в режиме реального времени.

Как можно реализовать требования, предъявляемые с учетом сказанного и сформулированные ранее? Для этого нужно проанализировать тот опыт, который накоплен в мировой геодезической практике, и современные научные разработки в этой области. Наиболее распространенными в мире до настоящего времени являются конформные геодезические проекции: коническая Ламберта, цилиндрическая Гаусса – Крюгера, азимутальная (квазистереографическая) Руссилья. При этом нам известно, что коническая проекция наиболее приемлема для изображения территорий, вытянутых вдоль какой-либо параллели, если она принимается за стандартную параллель проекции. Цилиндрическая – для территории, вытянутой вдоль осевого меридиана. Азимутальная – для территорий округлой формы, центр которых совпадает с центром проекции. Во всех этих проекциях картинная плоскость касается поверхности эллипсоида по стандартной параллели, осевому меридиану или в центральной точке соответственно.

Также известны самые различные варианты этих трех проекций на секущей плоскости. Наиболее известна из таких проекций и широко распространена на практике цилиндрическая проекция *UTM*. Ранее мы рассмотрели принцип формирования такого рода проекций, достаточно простой алгоритм вычислений в них.

Вместе с тем, ни одна из отдельно взятых проекций не может отвечать требованиям, указанным ранее, так как не может наилучшим образом подходить к изображению на плоскости различных по форме территорий. В этом случае нужно искать иные пути формирования проекций. Главным условием, как отмечалось ранее, должно быть условие обеспечения минимально возможных искажений отображаемых элементов. В картографии известен критерий, обеспечивающий такие условия. Этот критерий впервые сформулирован без доказательства в виде теоремы выдающимся российским механиком, математиком и картографом академиком Чебышевым П. Л. в 1856 году. Строгое доказательство теоремы Чебышева в 1894 году дал известный российский картограф академик Граве Д. А. В картографии этот критерий известен как **критерий Чебышева – Граве о наилучших проекциях**. Согласно этому критерию наименьшие искажения в пределах всей изображаемой территории будут иметь место в том случае, когда значение масштаба изображения постоянно на ее контуре. Другими словами, проекция будет наилучшей, если одна из ее изокол будет совпадать с контуром изображаемой территории. Таким образом, мы пришли к выводу о том, что в современной геодезической проекции должна быть заложена алгоритмическая возможность управления формой изокол.

Форма контуров изображаемых территорий может быть в общем случае произвольна. Здесь возникает вопрос, насколько близки по своей форме должны быть изокола и изображаемый контур. Известный российский геодезист и карто-

граф Урмаев Н. А. показал, что возможны два пути этой решения задачи. Первый путь – стремление к наилучшему совпадению контура и изоколы, при этом теряется конформность изображения. Второй путь – обобщенная аппроксимация контура изоколой в виде некоторой математической кривой при сохранении конформности изображения. При этом показано, что отличие максимальных искажений в проекциях, полученных двумя путями, несущественно и остается одного порядка. Для геодезических проекций, которые, как известно, конформны, возможен для реализации только второй путь.

Рассмотрим один из вариантов решения поставленной задачи. Как уже отмечалось нами ранее, основными уравнениями, определяющими конформность проекции, являются уравнения Коши – Римана в частных производных (7. 11) в их алгоритмическом описании (7. 28). Если взять две проекции, описанные общим алгоритмом, который мы рассмотрели ранее, координаты в которых обозначить соответственно через $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$ и получить новую проекцию с координатами (x, y) , связанными уравнениями

$$\begin{aligned} (x) &= k_1 (x)_1 + k_2 (x)_2 \\ (y) &= k_1 (y)_1 + k_2 (y)_2 \end{aligned} \quad (7. 68)$$

при выполнении условия

$$k_1 + k_2 = 1, \quad (7. 69)$$

то несложно убедиться в справедливости уравнений

$$(C_j) = k_1 (C_j)_1 + k_2 (C_j)_2 \quad (7. 70)$$

Здесь получаются коэффициенты новой проекции, которая будет конформной потому, что ее координаты получены в виде линейных уравнений относительно координат исходных проекций и для них справедливы уравнения Коши – Римана. Следовательно, для этой проекции будет работать общий алгоритм, рассмотренный нами ранее для геодезических проекций. Отличительной характеристикой новой проекции, полученной на основе каких-либо проекций, из рассмотренных нами ранее, является то, что, изменяя значения коэффициентов k_1 и k_2 в (7. 70) тем самым можно регулировать степень участия в новой проекции одной из двух исходных. Коэффициенты (7. 69) называются композиционными коэффициентами, а новая проекция – композиционной геодезической проекцией. Эта проекция имеет все свойства, присущие геодезическим проекциям, объединенным общим алгоритмом, как частные случаи включает в себя все рассмотренные ранее проекции, а также допускает формирование геодезических проекций, удовлетворяющих критерию Чебышева – Граве о наилучших проекциях.

Если взять в качестве первой цилиндрическую проекцию, а в качестве второй коническую, то при условии $k_1 = 0$ получим коническую, при $k_2 = 0$ – цилиндрическую, при $k_1 = k_2 = 0.5$ – азимутальную проекции. При различных иных значениях композиционных коэффициентов, удовлетворяющих (7. 69), например, $k_1 = 0.75$, $k_2 = 0.25$, получаем проекцию с формой изоколы, в виде эллипса, вытянутого вдоль осевого меридиана, при $k_1 = 0.15$, $k_2 = 0.85$ – проекцию с формой изоколы в виде эллипса, вытянутого вдоль стандартной параллели. Если один из композиционных коэффициентов отрицательный, то получаем проекцию с изоколами в виде двух пар сопряженных гипербол с их асимптотами.

Таким образом мы можем получить общий алгоритм формирования геодезических проекций, отвечающих современным требованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Закатов П. С. Курс высшей геодезии. М., Недра, 1976, 512 с.
2. Морозов В. П. Курс сфероидической геодезии. М., Недра, 1979, 296 с.
3. Подшивалов В. П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. Научное издание ПГУ, Новополюцк, 1998, 125 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бугаевский Л. М. Математическая картография. М., Златоуст, 1998, 400 с.
2. Подшивалов В. П., Лапина А. В. Решение задач по сфероидической геодезии. Методическое пособие. Издание НПИ, 1982, 30 с.
3. Урмаев Н. А. Сфероидическая геодезия. М., РИО ВТС, 1955, 250 с.

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Здесь приводятся основные математические формулы, которые применяются при решении задач сферической геодезии.

1. Тригонометрические функции:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x; \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$$

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}; \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y};$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x};$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1); \quad \sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3 \sin x);$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \left(\cos 4x - 4 \cos 2x + \frac{6}{2} \right); \quad \sin^5 x = \frac{1}{16} (\sin 5x - 5 \sin 3x + 10 \sin x);$$

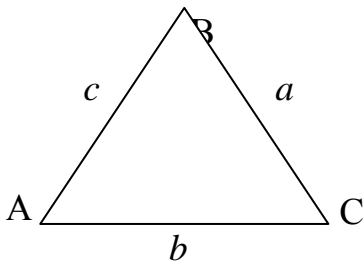
$$\sin^6 x = \frac{1}{32} \left(-\cos 6x + 6 \cos 4x - 15 \cos 2x + \frac{20}{2} \right);$$

$$\sin^7 x = \frac{1}{64} (-\sin 7x + 7 \sin 5x - 21 \sin 3x + 35 \sin x);$$

$$\sin^8 x = \frac{1}{128} \left(\cos 8x - 8 \cos 6x + 28 \cos 4x - 56 \cos 2x + \frac{70}{2} \right) \dots$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2}(\cos 2x + 1); & \cos^3 x &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x); \\ \cos^4 x &= \frac{1}{8}\left(\cos 4x + 4 \cos 2x + \frac{6}{2}\right); & \cos^5 x &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x); \\ \cos^6 x &= \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + \frac{20}{2}\right); \\ \cos^7 x &= \frac{1}{64}(\cos 7x + 7 \cos 5x + 21 \cos 3x + 35 \cos x); \\ \cos^8 x &= \frac{1}{128}\left(\cos 8x + 8 \cos 6x + 28 \cos 4x + 56 \cos 2x + \frac{70}{2}\right) \dots\end{aligned}$$

2. Формулы плоской тригонометрии:



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

Площадь треугольника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

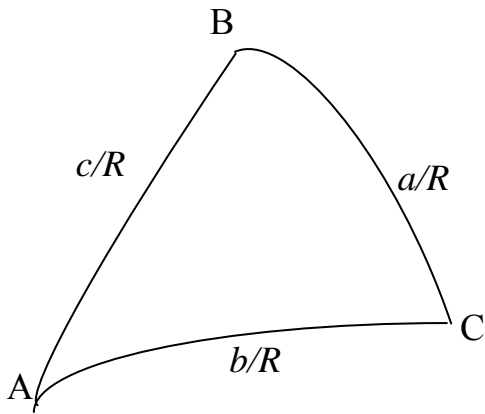
$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ - полупериметр треугольника.

3. Формулы сферической тригонометрии:

Если обозначить стороны сферического треугольника в частях радиуса сферы, то получаем длины этих сторон на сфере единичного радиуса

(сферические расстояния): $\alpha = \frac{a}{R}; \quad \beta = \frac{b}{R}; \quad \gamma = \frac{c}{R}.$



Теорема синусов:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

Теорема косинусов:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A;$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha$$

Для решения прямоугольного сферического треугольника удобно применять аналогии Непера (если катеты брать как дополнение до $\pi/2$, а прямой угол не считать элементом): косинус любого элемента треугольника равен произведению синусов двух несмежных с ним элементов или произведению котангенсов смежных с ним двух элементов. Например, пусть угол B треугольника равен $\pi/2$, тогда получаем:

$$\cos C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \sin A = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{ctg} \beta;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin A \sin \beta = \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} C \quad ;$$

Сумма углов сферического треугольника: $A + B + C = 180^\circ + \varepsilon$, где ε - сферический избыток, вычисляемый по формуле

$$\varepsilon'' = \rho'' S_{\Delta} / R^2$$

4. Разложение дифференцируемых функций в ряды:

Ряд Тейлора

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots + f^n(x_0)\frac{\Delta x^n}{n!} + \Delta f$$

Погрешность вычисления значения функции Δf оценивают с помощью остаточного члена в форме Лагранжа. Если, например, учтено n степеней разложения, то погрешность

$$\Delta f \leq f^{n+1}(\chi) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где χ - значение аргумента из области определения x , приводящее к максимально возможному значению производной.

Если применить формулу Тейлора для некоторых наиболее часто встречающихся функций, получим:

Формула Маклорена ($x_0 = 0$) применяется для вычисления функций малых аргументов

$$f(\Delta x) = f(0) + f'(0)\Delta x + f''(0)\frac{\Delta x^2}{2} + \dots + f^n(0)\frac{\Delta x^n}{n!} + \Delta f$$

Тригонометрические функции:

$$\sin(\Delta x) = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\Delta x^5}{5!} - \dots;$$

$$\cos(\Delta x) = 1 - \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\Delta x^4}{4!} - \dots;$$

$$tg(\Delta x) = \Delta x + \frac{\Delta x^3}{3} + \frac{2\Delta x^5}{15} + \frac{17\Delta x^7}{315} + \frac{62\Delta x^9}{2835} + \dots;$$

$$ctg(\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{3} - \frac{\Delta x^3}{45} - \frac{2\Delta x^5}{945} - \frac{\Delta x^7}{4725} - \frac{\Delta x^9}{467775} - \dots$$

Биномиальное разложение (n – любое, как положительное, так и отрицательное, как целое, так и дробное):

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + (\pm 1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}x^k + \dots$$